

IB 515-84-7

STRUKTUR EINES DYNAMISCHEN
MODELLS FÜR ROBOTER MIT
ROTATORISCHEN FREIHEITSGRADEN

S. TÜRK

[84-51500-80]

Freigabe:

Die Bearbeiter:

Dipl.-Ing. S. Türk

Unterschriften:

S. Türk

Der Abteilungsleiter
Dr. G. Hirzinger

~~Der stellvertretende Direktor~~

Dr.-Ing. J. Ackermann
Der Institutsdirektor:

G. HirzingerJ. Ackermann

Dieser Bericht enthält:

57 Blatt davon6 Bilderkeine Diagramme

Vorwort:

Betrachtet man die Aufgaben, die heute und in Zukunft an Industrieroboter gestellt werden, so zeigt eine nähere Analyse, daß sich diese in zwei Kategorien einteilen lassen. Einmal ist die Hand des Roboters in Kontakt mit der Roboterumgebung, dies ist beispielsweise der Fall, beim Fügen, Schleifen oder Polieren. Das andere Mal ist die Roboterhand frei, das bedeutet, sie bewegt sich, ohne die Umgebung zu berühren. Beispiele dafür sind Spritzen, Bahnschweißen oder Positionieren. Hier wird die zweite Kategorie betrachtet.

Anspruchsvolle Fertigungs- und Montageaufgaben, bei denen eine hohe Genauigkeit und Geschwindigkeit gefordert werden, lassen sich mit konventionellen Reglern nur unbefriedigend lösen, da die Kopplungen der Armbewegungen nicht berücksichtigt werden. Um diese zu berücksichtigen, muß man sich genaueren Einblick in die physikalischen Zusammenhänge verschaffen. Diese Zusammenhänge kann man durch ein dynamisches Robotermodell erfassen. Mit Hilfe dessen lassen sich fortgeschrittene Regelalgorithmen entwerfen, die den gehobenen Anforderungen gerecht werden. Die Entwicklung eines solchen Modells ist daher von entscheidender Bedeutung.

In dem hier vorliegenden Bericht wird ein Modell zur Beschreibung von Robotern mit rotatorischen Achsen angegeben. Es werden die Differentialgleichungen abgeleitet, die dieses Modell beschreiben. Diese Differentialgleichungen werden in eine Form gebracht, die einen guten Einblick in das Roboterverhalten erlaubt. Die aufgestellten Gleichungen sind, bedingt durch die Komplexität der Roboterbewegungen, sehr kompliziert. Um einen Roboter über diese Gleichungen zu regeln, müssen sie in Echtzeit auf einem Digitalrechner bearbeitbar sein. Es wird gezeigt, wie man die Gleichungen erheblich vereinfachen kann und auf welche Weise die einzelnen Komponenten des Roboters (Arme, Gelenke, Getriebe und Antriebe) zusammenwirken. Es zeigt sich, daß das dynamische Robotermodell unter gewissen Voraussetzungen in Teilmodelle zerfällt. Diese Tatsache ist für die weiteren Arbeiten von entscheidender Bedeutung. Die vorliegenden Ergebnisse sind damit die Basis für den Entwurf eines Regelkonzeptes mit dem hochgenaues Bahnfahren ermöglicht wird.

Inhaltsverzeichnis:

Seite:

1. Einleitung	4
2. Bezeichnungen	6
3. Modellbeschreibung	15
3.1. Das Mehrkörpersystem	15
3.2. Bezeichnungen am MKS	16
3.3. Kräfte am MKS	17
3.4. Struktur der Bewegungsgleichungen	19
3.5. Kanes Methode zur Erstellung der Bewegungsgleichungen	21
4. Kinematik	24
4.1. Geschwindigkeiten und Beschleunigungen	24
4.1.1. Winkelgeschwindigkeiten	24
4.1.2. Winkelbeschleunigungen	25
4.1.3. Translatorische Geschwindigkeiten	26
4.1.4. Translatorische Beschleunigungen	27
4.2. Partielle Geschwindigkeiten	28
4.2.1. Partielle Winkelgeschwindigkeiten	28
4.2.2. Partielle translatorische Geschwindigkeiten	29
5. Dynamik	33
5.1. Innere und äußere Kräfte und Momente	33
5.2. Trägheitskräfte	38
5.2.1. Beiträge der Impulse	39
5.2.2. Beiträge der Drehimpulse	42
6. Interpretation der Ergebnisse	48
7. Ansätze zur Modellreduktion	52
8. Anmerkungen zu den Modellannahmen	55
9. Zusammenfassung	56
Literatur	58

1. Einleitung

Will man eine Roboterregelung für genaues Bahnfahren entwerfen und realisieren, braucht man ein dynamisches Modell des Roboters. Ganz konkret gesprochen, muß man wissen, wie der Roboter sich bewegt, wenn man gewisse elektrische Spannungen an die Anschlußklemmen seiner Antriebsmotoren legt.

Eine genaue Untersuchung von Robotern zeigt, daß diese in der Mehrzahl aus drei wesentlichen Komponenten aufgebaut sind:

- Den Antrieben, in den allermeisten Fällen Elektromotoren,
- den Antriebssträngen, dazu zählen wir Getriebe, Antriebswellen, etc.,
- den Roboterarmen, die durch Gelenke verbunden sind.

Im einem dynamischen Modell müssen die dynamischen Effekte aller drei Komponenten und deren Verkopplung berücksichtigt werden.

In der Literatur werden im allgemeinen nur die Bewegungsgleichungen der Roboterarme angegeben. Das bedeutet, man nimmt an, die Antriebsmomente könnten direkt an den Armen aufgebracht werden. Diese Modellvorstellung reicht aus für prinzipielle Studien.

Für realistischere Untersuchungen ist diese Vorstellung aber unbefriedigend, da sie die folgenden wesentlichen Effekte ignoriert:

- Elastizität, Reibung, Lose und Massenträgheitswirkungen in den Antriebssträngen.
- Massenträgheitsmomente der Läufer der Antriebsmotoren.
- Kreiselkräfte, bedingt durch die schnelldrehenden Motorläufer und Antriebswellen.
- Den dynamischen Zusammenhang zwischen Motormoment und Motorspannung.

In der vorliegenden Arbeit wird der Rahmen für eine Modellvorstellung für Roboter mit rotatorischen Gelenken und elektromotorischem Antrieb entwickelt, die obengenannte Effekte mitberücksichtigt.

Die aufgestellten Differentialgleichungen werden auf Möglichkeiten zur Vereinfachung untersucht.

Die Differentialgleichungen werden in eine Form gebracht, an der man sehr gut den Einfluß der drei Komponenten Antrieb, Antriebsstrang und Arme auf das Gesamtverhalten erkennt.

Es zeigt sich, daß man unter gewissen Voraussetzungen die durch die schnell-drehenden Läufer und Wellen bedingten Kreiselkräfte vernachlässigen kann.

Dies bedeutet:

- Motoren und Arme sind nur über die Momente in den Getrieben gekoppelt, nicht aber über Kreiselkräfte.
- Man kann die dynamischen Gleichungen der beiden Teil-MKS Gesamtarme und Motoren unabhängig voneinander aufstellen und anschließend durch die Kraftgesetze verknüpfen.

2. Bezeichnungen

Um dem Leser den Überblick zu erleichtern, sind einige Vorbemerkungen zur Terminologie und zur Bezeichnungsweise hilfreich.

- Wenn von Vektoren die Rede ist, so sind stets dreidimensionale, euklidische Vektoren gemeint. Diese Vektoren werden durch Unterstreichen gekennzeichnet.
- Unter Tensoren sind stets dreidimensionale Tensoren zweiter Stufe zu verstehen. Gekennzeichnet werden sie durch doppeltes Unterstreichen. Verwendet werden ohnehin nur die Massenträgheitstensoren starrer Körper.
- Zur Kennzeichnung des verjüngenden Produktes zwischen zwei Vektoren bzw. zwischen Tensor und Vektor wird der Punkt, \cdot , verwendet.
- Das Kreuzprodukt zweier Vektoren wird mit "x" bezeichnet.
- Einspaltige und quadratische Matrizen werden nicht weiter gekennzeichnet.
- Orthonormierte rechtshändige Vektorbasen werden mit "e" gekennzeichnet.
- $\{0, \underline{e}\}$ bezeichnet Koordinatensysteme.
- Der Zusatz "absolut" bezieht einen Vektor auf das Inertialsystem.

Soweit zur allgemeinen Terminologie.

Die wesentlichen Bezeichnungen und verwendeten Symbole sind in nachfolgender Liste erläutert:

Liste der verwendeten Symbole:

$\{0^\circ, \underline{e}^\circ\}$	- Ursprung und Orientierung des Inertialsystems
A_{CM}^i	- Massenmittelpunkt des Armes i
R_{CM}^i	- Massenmittelpunkt des Rotors i
CM^i	- Massenmittelpunkt des Gesamtarmes i
$\{A_{CM}^i \underline{A}_e^i\}$	- Körperfestes Koordinatensystem des Armes i
$\{R_{CM}^i \underline{R}_e^i\}$	- Körperfestes Koordinatensystem des Rotors i .
$\frac{d}{dt} \underline{x}$	- Zeitliche Ableitung des Vektors \underline{x} bzgl. \underline{A}_e^i
$\frac{d}{dt} \underline{x}$	- Zeitliche Ableitung des Vektors \underline{x} bzgl. \underline{e}° , wird auch absolute Ableitung genannt.
\dot{g}	- Ableitung der Variablen g nach der Zeit.
\underline{r}^i	- Ortsvektor von 0° nach A_{CM}^i
\underline{v}^i	- Absolute Geschwindigkeit des A_{CM}^i
\underline{a}^i	- Absolute Beschleunigung des A_{CM}^i
\underline{v}^i	- Absolute Geschwindigkeit des R_{CM}^i
\underline{a}^i	- Absolute Beschleunigung des R_{CM}^i
$\underline{\omega}^i$	- Absolute Winkelgeschwindigkeit des \underline{A}_e^i
$\underline{\alpha}^i$	- Absolute Winkelbeschleunigung des \underline{A}_e^i
$\underline{\omega}^i$	- Absolute Winkelgeschwindigkeit des \underline{R}_e^i
$\underline{\alpha}^i$	- Absolute Winkelbeschleunigung des \underline{R}_e^i

Die folgenden partiellen Geschwindigkeiten sind in Abschnitt 3.5. erläutert.

\underline{A}_{v-r}^i	- r-te partielle Geschwindigkeit von \underline{A}_v^i
\underline{R}_{v-r}^i	- r-te partielle Geschwindigkeit von \underline{R}_v^i
$\underline{A}_{\omega-r}^i$	- r-te partielle Winkelgeschwindigkeit von \underline{A}_{ω}^i
$\underline{R}_{\omega-r}^i$	- r-te partielle Winkelgeschwindigkeit von \underline{A}_{ω}^i
\underline{A}_{Ω}^i	- Winkelgeschwindigkeit des \underline{A}_e^i bezüglich des \underline{A}_e^{i-1} . ($\underline{A}_e^0 \equiv \underline{e}^0!$), vgl. Bild 3-3.
\underline{R}_{Ω}^i	- Winkelgeschwindigkeit des \underline{R}_e^i bezüglich des \underline{A}_e^{i-1} , vgl. Bild 3-3.
$\star \underline{\Omega}^i$	- Winkelgeschwindigkeit des \underline{A}_e^i bezüglich des \underline{R}_e^i , vgl. Bild 3-3
\underline{A}_H^i	- Winkelbeschleunigung des \underline{A}_e^i bezüglich des \underline{A}_e^{i-1}
\underline{R}_H^i	- Winkelbeschleunigung des \underline{R}_e^i bezüglich des \underline{A}_e^{i-1}
\underline{c}^{ii}	- Abstandsvektor von \underline{A}_{CM}^i zur Achse i, vgl. Bild 3-4
\underline{c}^{i-1i}	- Abstandsvektor von \underline{A}_{CM}^{i-1} zur Achse i, vgl. Bild 3-4
\underline{b}^{i-1i}	- Abstandsvektor von \underline{A}_{CM}^{i-1} zu \underline{R}_{CM}^i , vgl. Bild 3-4.
\underline{n}^i	- Richtungsvektor der Gelenkachse i. $ \underline{n}^i = 1$
\underline{A}_m^i	- Masse des Armes i
\underline{R}_m^i	- Masse des Rotors i
\underline{m}^i	- Masse des Gesamtarmes i
\underline{A}_I^i	- Trägheitssensor des Armes i bezüglich \underline{A}_{CM}^i

$\underline{\underline{R_I^i}}$	- Trägheitssensor des Rotors i bezüglich R_{CM^i}
$\underline{\underline{I^i}}$	- Trägheitssensor des Gesamtarms i bezüglich CM^i
\underline{P}	- Impuls
\underline{H}	- Drehimpuls
$\underline{\dot{u}^i}$	- Übersetzungsverhältnis des i-ten Getriebes
$\underline{L^i}$	- wirksames, eingeprägtes Drehmoment auf Rotor i
$\underline{Q^i}$	- Reibmoment im Lager zwischen Arm i-1 und Arm i
$\underline{F_k^i}$	- Kontaktkraft im Getriebe i
$\underline{z^i}$	- Radius des kleinen Rades im Getriebe i, vgl. Bild 3-5
$\underline{Z^i}$	- Radius des großen Rades im Getriebe i vgl. Bild 3-5.
$\underline{M^i}$	- $\underline{z^i} \times \underline{F_k^i}$
r	- Laufindex für die partiellen Geschwindigkeiten und die Zeilen der Bewegungsgleichung.
N	- Anzahl der Arme bzw. Rotoren (üblicherweise $N=6$)
J	- generalisierte Massenmatrix; $\dim J = 2N \times 2N$
χ	- Matrix der generalisierten Kräfte; $\dim \chi = 2N \times 1$
λ	- Matrix der generalisierten eingeprägten inneren Kräfte, $\dim \lambda = 2N \times 1$
g	- Matrix der generalisierten Geschwindigkeiten, $\dim g = 2N \times 1$

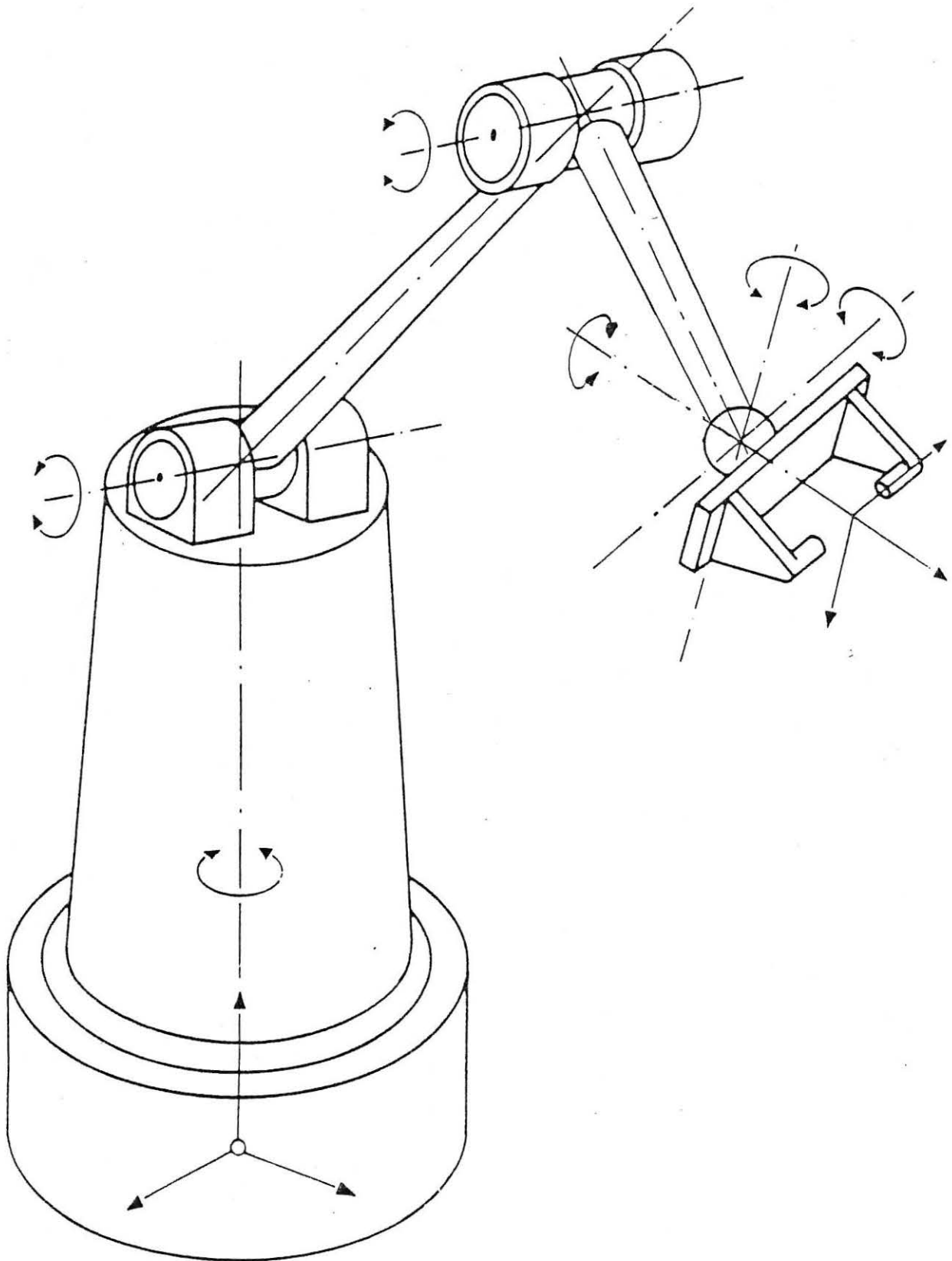


Bild 3-1 Kinematik eines Sechsgelenkroboters

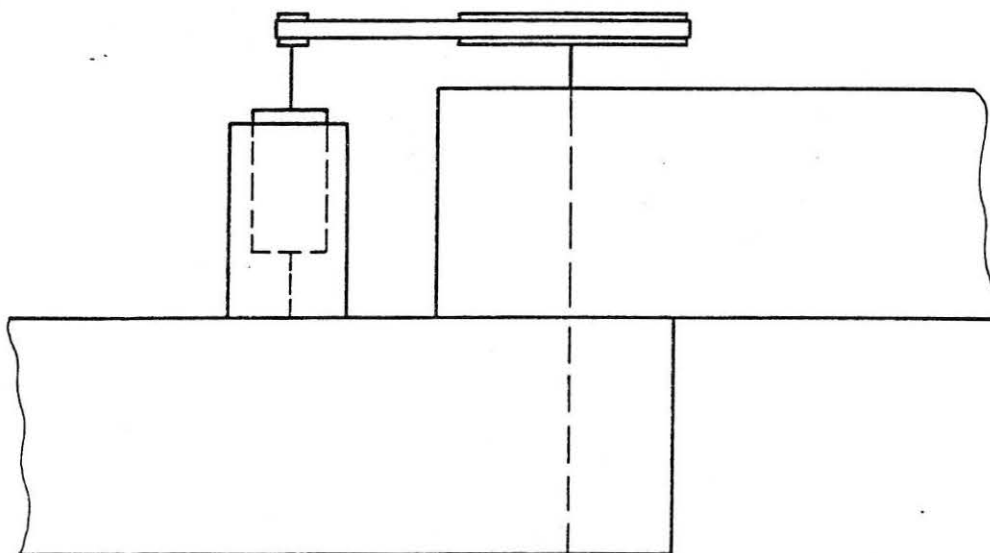
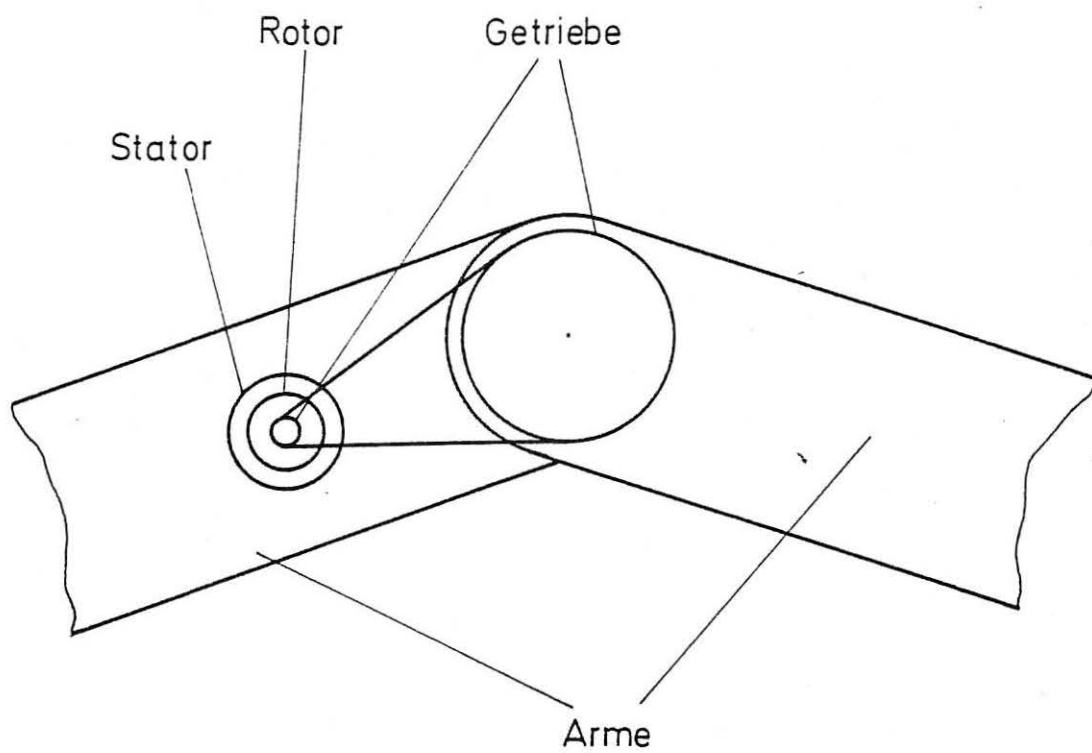


Bild 3-2 Drauf- und Seitenansicht eines abstrahierten Robotergelenks

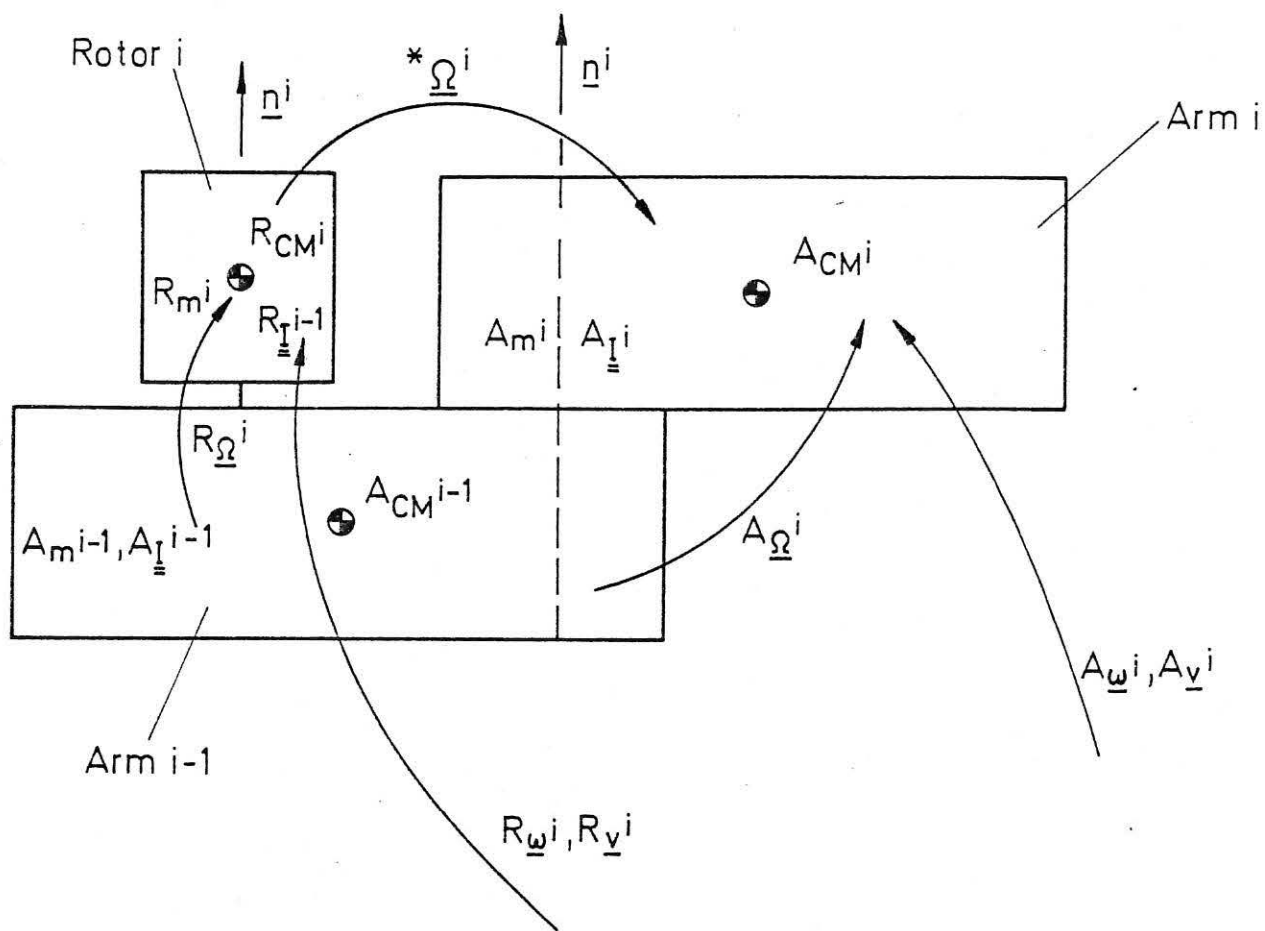


Bild 3-3 Kinematische Größen und Parameter am Robotergelenk

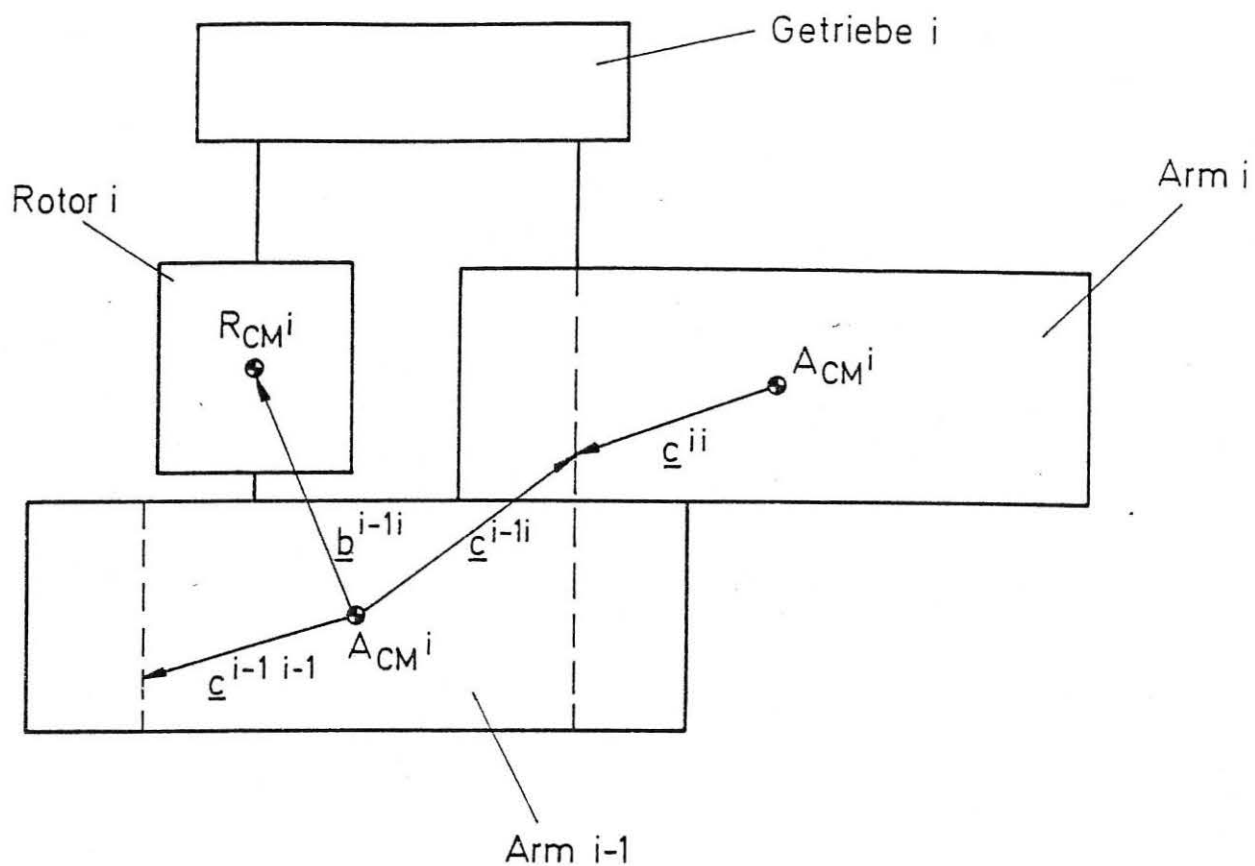


Bild 3-4 \underline{c} - und \underline{b} - Vektoren an einem Gelenk

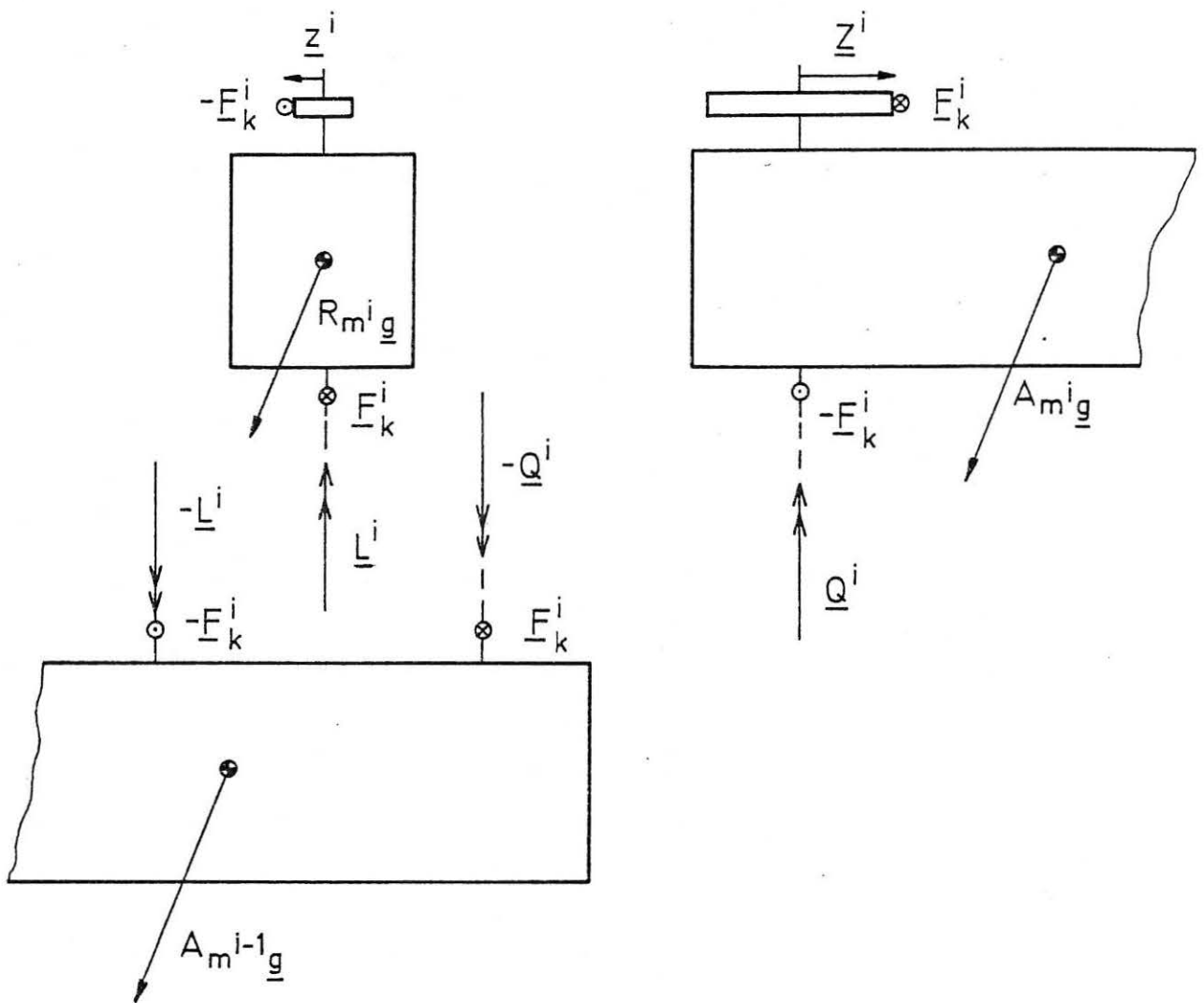


Bild 3-5 Eingeprägte Kräfte und Momente im freigeschnittenen Gelenk

3. Modellbeschreibung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine Modellvorstellung für Roboter mit nur rotatorischen Freiheitsgraden zu entwickeln und für dieses Modell die Bewegungsgleichungen abzuleiten. Nun ist das Modell eines technischen Systems keinesfalls die exakte Beschreibung der Realität, vielmehr handelt es sich bei jedem Modell um eine mehr oder weniger starke Idealisierung der Wirklichkeit. Es stellt sich die Frage, welche Teilaspekte der Realität man modellieren möchte.

Im vorliegenden Fall interessiert man sich für die Bewegung der Roboterarme, die Verkopplungen durch mehrere gleichzeitig bewegte Roboterarme und den Zusammenhang zwischen Antriebsmomenten und ausgeführter Bewegung. Nicht von Interesse sind die elastischen Verformungen der Roboterarme, da sie bei heutiger Bauweise den Roboter sehr klein und in der Praxis kaum relevant sind.

Das Robotermodell ist somit ein Mehrkörpersystem (MKS).

Ein MKS besteht aus starren, massebehafteten Körpern, die durch Gelenke verbunden sind. Kraftwirkungen zwischen den Körpern des MKS werden durch masselos modellierte Mechanismen (Federn, Dämpfer und dgl.) aufgebracht.

3.1. Das Mehrkörpersystem

Roboter mit nur rotatorischen Freiheitsgraden und elektromotorischem Antrieb sind aus drei wesentlichen Komponenten aufgebaut [3, 5]:

- den eigentlichen Armen,
- den Motoren, Tachogeneratoren und Winkelgebern,
- den Antriebssträngen, also Übertragungswellen, Antriebsriemen und Getrieben.

Bild 3-1 zeigt die kinematische Anordnung eines typischen Roboters.

Die Arme inclusive aller fest an ihnen angebrachten Teile wie Motor-,

Tacho-, Winkelgebergehäuse und abtreibende Getrieberäder, werden als starre Körper modelliert. Ebenso kann man die Läufer der Motoren, Tachogeneratoren, Winkelgeber und die Getriebeantriebsräder zu starren Körpern zusammenfassen. Im weiteren werden sie Rotoren genannt. Die Getriebe denken wir uns aus einer reibungs-, elastizitäts- und spielfreien Übersetzung und eines diese Effekte berücksichtigenden Kraftgesetzes zusammengesetzt. Bild 3-2 zeigt Drauf- und Seitenansicht eines so abstrahierten Robotergelenks.

Das Getriebe ist der Einfachheit halber als Riementrieb dargestellt. Das MKS-Modell des Roboters hat somit folgende Eigenschaften:

1. Alle Massen des Roboters werden einem Arm oder einem Rotor zugeordnet. Arme und Rotoren sind starre Körper.
2. Die Verbindung zwischen Arm und antreibendem Rotor ist masselos und wird durch eine ideale Übersetzung und ein Kraftgesetz beschrieben.
3. Die Drehachsen des antreibenden Rotors und des angetriebenen Armes sind parallel.
4. Alle Gelenke sind einachsige Rotationsgelenke.
5. Die Rotoren sind rotationssymmetrische Körper.

3.2. Bezeichnungen am MKS

In den Bildern 3-3 und 3-4 sind die zur Beschreibung der Bewegungen des MKS erforderlichen Variablen und Parameter eingetragen. Der Arm 0 ist der ruhende Sockel des Roboters, vgl. Bild 3-1. Der Rotor i ist im Arm $i - 1$ "eingebettet" und treibt den Arm i an. i läuft von 1 bis N , wobei N die Anzahl der Arme bzw. Rotoren ist.

3.3. Kräfte im MKS

Bild 3-5 zeigt die freigeschnittenen Körper. Eingetragen sind nur die eingepägten Kräfte und Momente, Zwangskräfte sind weggelassen. Es sind:

1. \underline{L}^i - Antriebsmoment im Luftspalt des Motors i , einschließlich aller Reibungskräfte im Motor. Diese Antriebsmomente sind in der Regel in Form von Differentialgleichungen gegeben, die die elektrischen Eigenheiten des Motors beschreiben. Sie können ohne Probleme zu den fertigen Bewegungsgleichungen hinzugefügt werden!
2. \underline{F}_k^i - Kontaktkraft im Getriebe i . Tritt in den Gleichungen nicht explizit auf, dient nur zur Definition des Momentes \underline{M}^i .
3. \underline{M}^i - Momentgesetz über das Getriebe i ; beschreibt Effekte wie Lose, Elastizität und Reibung im Getriebe i .
4. \underline{Q}^i - Momentgesetz zwischen den Armen $i - 1$ und i , zur Beschreibung der Lagerreibung.

Aus dem Bild lassen sich alle auf den Arm i und den Rotor i wirkenden Kräfte und Momente (ohne Zwangskräfte- und Momente) ablesen.

Kraft auf Arm i :

$${}^A \underline{F}^i = {}^A m^i \underline{g} \quad (3.1)$$

Kraft auf Rotor i :

$${}^R \underline{F} = {}^R m^i \underline{g} \quad (3.2)$$

Moment auf Arm i :

$${}^A \underline{L}^i = \underline{z}^i \times \underline{F}_k^i + \underline{Q}^i - \underline{Q}^{i+1} - \underline{L}^{i+1} + (\underline{z}^{i+1} - \underline{z}^{i+1}) \times \underline{F}_k^{i+1} \quad (3.3)$$

Moment auf Rotor i:

$${}^R \underline{L}^i = \underline{L}^i - \underline{z}^i \times \underline{F}_k^i \quad (3.4)$$

Es gilt:

$$\underline{\ddot{z}}^i = \ddot{u}^i \underline{z}^i \quad (3.5)$$

und

$$\underline{M}^i = \underline{z}^i \times \underline{F}_k^i \quad (3.6)$$

Mit der Einführung von (3.5) und (3.6) macht man sich frei von der speziellen Getriebeart nach Bild 3-2. Wir können jetzt alle Getriebe, die sich durch eine Übersetzung \ddot{u} und ein Momentengesetz \underline{M} summarisch beschreiben lassen, in unsere Betrachtung einbeziehen.

Mit (3.5) und (3.6) kann man (3.3) und (3.4) umschreiben:

$${}^A \underline{L}^i = \ddot{u}^i \underline{M}^i + \underline{Q}^i - \underline{Q}^{i+1} - \underline{L}^{i+1} + (\ddot{u}^{i+1} - 1) \underline{M}^{i+1} \quad (3.7)$$

$${}^R \underline{L}^i = \underline{L}^i - \underline{M}^i \quad (3.8)$$

Für (3.1) bis (3.8) gilt:

$$i = 1, \dots, N.$$

Die mit $N + 1$ indizierten Momente sind natürlich Null, da der Roboter mit dem N -ten Arm endet.

3.4. Struktur der Bewegungsgleichungen

In Kapitel 5 werden die Bewegungsgleichungen aufgestellt. Es ist aber sehr hilfreich, vorab einen Blick auf die Struktur dieser Gleichungen zu werfen.

Zunächst stellt sich die Frage, welche generalisierten Koordinaten zur Beschreibung des MKS verwendet werden sollen. Da wir einen Roboter mit rotatorischen Freiheitsgraden betrachten, bieten sich die Relativwinkelgeschwindigkeiten bzw. die zugehörigen Relativwinkel an.

An Bild 3-3 sieht man sofort, daß die Konsistenzbedingung

$${}^A \underline{\dot{\Omega}}^i - {}^* \underline{\dot{\Omega}}^i - {}^R \underline{\dot{\Omega}}^i = 0 \quad (3.9)$$

gilt.

Dies bedeutet, daß zwei der drei Summanden unabhängige Variable sind.

Wir entscheiden uns für ${}^A \underline{\dot{\Omega}}^i$ und ${}^R \underline{\dot{\Omega}}^i$ als unabhängige Variablen.

Als generalisierte Geschwindigkeitskoordinaten führen wir die $N {}^A g^i$ und die $N {}^R g^i$ ein.

Anmerkung: Wir verwenden hier im wesentlichen die von Roberson und Schwertassek verwendete Notation [2].

Es gilt:

$${}^A \underline{\dot{\Omega}}^i = \underline{n}^i {}^A g^i \quad (3.10)$$

$${}^R \underline{\dot{\Omega}}^i = \underline{n}^i {}^R g^i \quad (3.11)$$

Die \underline{n}^i sind die Richtungseinheitsvektoren der Drehachsen (vgl. Bild 3-3). Für die zugehörigen generalisierten Lagekoordinaten p gelten die kinematischen Bewegungsgleichungen:

$${}^A \dot{p}^i = {}^A g^i \quad (3.12)$$

$${}^R \dot{p}^i = {}^R g^i \quad (3.13)$$

Mit den eingeführten generalisierten Koordinaten ergeben sich für dieses Modell die dynamischen Bewegungsgleichungen zu: [2].

$$J \dot{g} = \chi^k + \chi^G + \lambda \quad (3.14)$$

Dabei sind:

J - die $2N \times 2N$ generalisierte Massenmatrix

\dot{g} - die $2N \times 1$ Spaltenmatrix der generalisierten Beschleunigungen.
Die Anordnung der $A_{\dot{g}^i}^i$, $R_{\dot{g}^i}^i$ in \dot{g} wählen wir zu:

$$\dot{g} = \begin{bmatrix} A \dot{g} \\ R \dot{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \dot{g}^1 \\ \vdots \\ A \dot{g}^N \\ R \dot{g}^1 \\ \vdots \\ R \dot{g}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{g}_r \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$r = 1, \dots, 2N$

χ^k - die $2N \times 1$ Spaltenmatrix der generalisierten Kreiselkräfte.

χ^G - die $2N \times 1$ Spaltenmatrix der generalisierten Gewichtskräfte.

λ - die $2N \times 1$ Spaltenmatrix der inneren, eingepprägten Kräfte.

Aufgrund der Anordnung der generalisierten Geschwindigkeiten in (3.15), kann man (3.14) noch weiter strukturieren, was sich als sehr vorteilhaft erweist.

$$\begin{bmatrix} A A_J & A R_J \\ R A_J & R R_J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \dot{g} \\ R \dot{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \chi^k \\ R \chi^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \chi^G \\ R \chi^G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \lambda \\ R \lambda \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Wobei: $\dim {}^A A \mathcal{J} = \dim {}^A R \mathcal{J} = \dim {}^R A \mathcal{J} = \dim {}^R R \mathcal{J} = N \times N$

$$\dim {}^A \chi^k = \dim {}^R \chi^k = \dim {}^A \chi^G = \dim {}^R \chi^G = N \times 1$$

$$\dim {}^A \lambda = \dim {}^R \lambda = N \times 1$$

3.5. Kanes Methode zur Erstellung der Bewegungsgleichungen

Es gibt eine ganze Reihe mechanischer Prinzipie um die Bewegungsgleichungen (3.14) aufzustellen, d.h. die Matrizen J , χ und λ zu berechnen.

Wir gehen hier nach der von Kane angegebenen Methode vor [1].

Die Vorgehensweise wird in diesem Abschnitt kurz erläutert.

- Man schreibe Impuls- und Drallsatz für jeden Körper an. Da wir es mit N Armen und R Rotoren zu tun haben, erhalten wir $4N$ Vektorgleichungen.

$${}^A \dot{\underline{p}}^i = {}^A m^i {}^A \underline{a}^i = {}^A \underline{F}^i$$

$${}^R \dot{\underline{p}}^i = {}^R m^i {}^R \underline{a}^i = {}^R \underline{F}^i \quad (3.17)$$

$${}^A \dot{\underline{H}}^i = ({}^A \underline{I}^i \cdot {}^A \underline{\omega}^i)^{\cdot} = {}^A \underline{L}^i$$

$${}^R \dot{\underline{H}}^i = ({}^R \underline{I}^i \cdot {}^R \underline{\omega}^i)^{\cdot} = {}^R \underline{L}^i$$

- Man bestimme die partiellen Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten jedes Körpers. Das sind die partiellen Ableitungen von Absolutgeschwindigkeit \underline{v} bzw. Absolutwinkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ nach den generalisierten Geschwindigkeitskoordinaten g .

Also:

r-te partielle Geschwindigkeit von Arm/Rotor i

$${}^{A/R} \underline{v}_r^i = \frac{\partial}{\partial q_r} {}^{A/R} \underline{v}^i \quad (3.18)$$

r-te partielle Winkelgeschwindigkeit von Arm/Rotor i

$${}^{A/R} \underline{\omega}_r^i = \frac{\partial}{\partial q_r} {}^{A/R} \underline{\omega}^i \quad (3.19)$$

- Mit Hilfe der partiellen Geschwindigkeiten/Winkelgeschwindigkeiten projiziert man Impuls- und Drallsätze aller Körper auf die freien Bewegungsmöglichkeiten, eliminiert damit die Zwangskräfte und reduziert auf Zustandsform (3.14).

Die r-te Zeile der Bewegungsgleichung (3.14) lautet dann:

$$\sum_{i=1}^N {}^A \underline{v}_r^i \cdot {}^A \dot{\underline{p}}^i + {}^R \underline{v}_r^i \cdot {}^R \dot{\underline{p}}^i + {}^A \underline{\omega}_r^i \cdot {}^A \dot{\underline{H}}^i + {}^R \underline{\omega}_r^i \cdot {}^R \dot{\underline{H}}^i \quad (3.20)$$

$$= \sum_{i=1}^N {}^A \underline{v}_r^i \cdot {}^A \underline{F}^i + {}^R \underline{v}_r^i \cdot {}^R \underline{F}^i + {}^A \underline{\omega}_r^i \cdot {}^A \underline{L}^i + {}^R \underline{\omega}_r^i \cdot {}^R \underline{L}^i$$

Nun muß man nur noch nach Elementen von J , x und λ ordnen, um die Form (3.14) bzw. (3.16) zu erhalten.

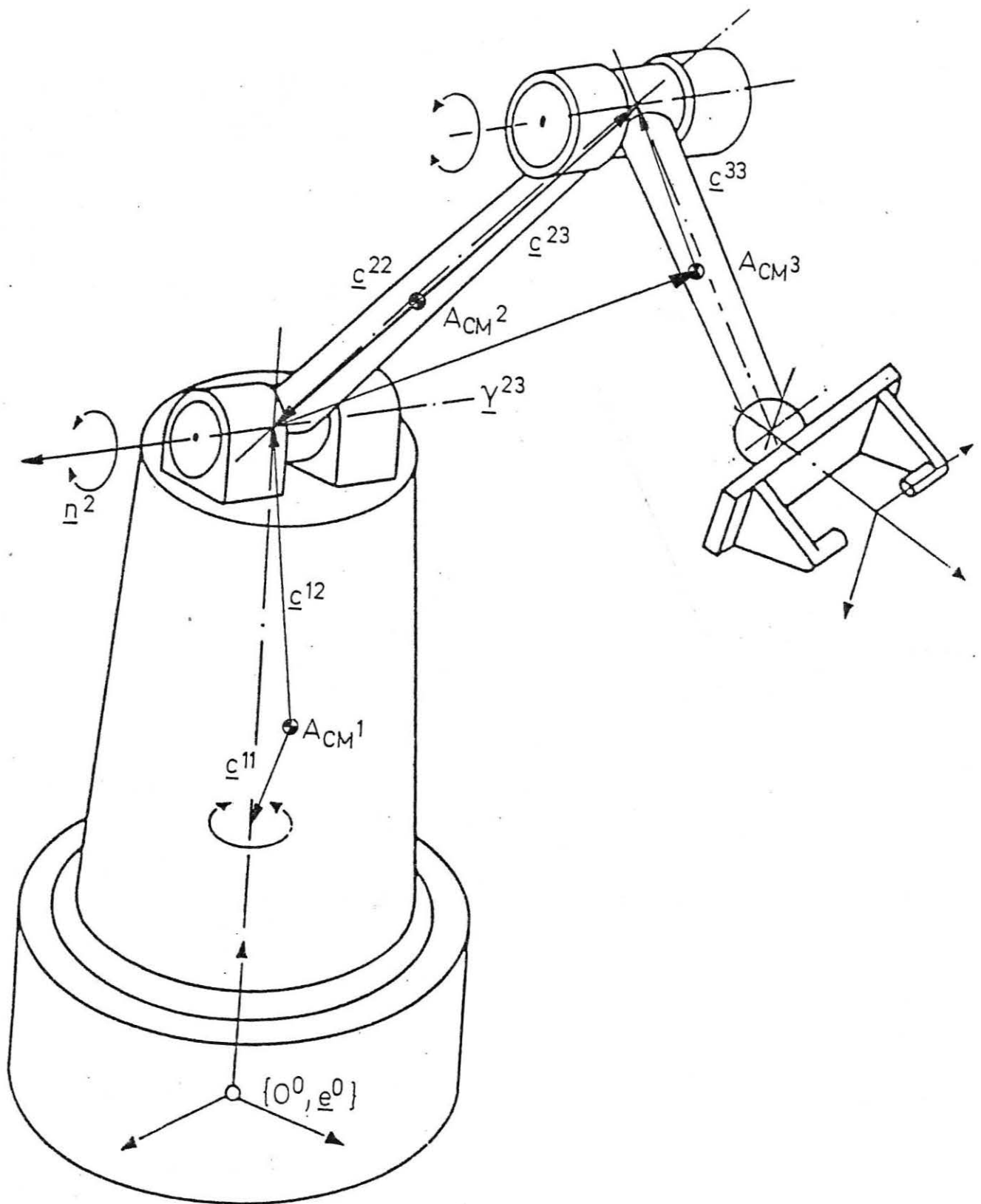


Bild 4-1 Zur Definition der Vektoren \underline{Y}

4. Kinematik

In diesem Kapitel werden die Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und partiellen Geschwindigkeiten bzw. Winkelgeschwindigkeiten, Winkelbeschleunigungen und partiellen Winkelgeschwindigkeiten der Arme i und Rotoren i angegeben. Wir beziehen uns auf die Bilder 3-3 und 3-4.

4.1. Geschwindigkeiten und Beschleunigungen

Vorbemerkung: Der Index i ist die Arm- bzw. Rotornummer, und falls nichts anderes vermerkt: $i = 1, \dots, N$.

4.1.1. Winkelgeschwindigkeiten

Die Winkelgeschwindigkeit des Rotors i gegenüber Inertial kann man aus Bild 3-3 ablesen:

$${}^R \underline{\omega}^i = {}^A \underline{\omega}^{i-1} + {}^R \underline{\Omega}^i \quad (4.1)$$

${}^A \underline{\omega}^0$ ist die Winkelgeschwindigkeit des unbewegten Robotersockels:

$${}^A \underline{\omega}^0 = \underline{0} \quad (4.2)$$

Für den Arm i erhält man:

$${}^A \underline{\omega}^i = {}^A \underline{\omega}^{i-1} + {}^A \underline{\Omega}^i \quad (4.3)$$

Das in (4.1) und (4.3) auftretende ${}^A \underline{\omega}^{i-1}$ berechnet sich zu:

$${}^A \underline{\omega}^{i-1} = \sum_{h=1}^{i-1} {}^A \underline{\Omega}^h \quad (4.4)$$

Mit Hilfe der generalisierten Geschwindigkeiten und den Richtungsvektoren der Achsen kann man schreiben:

$${}^R \underline{\Omega}^i = \underline{n}^i {}^R \dot{q}^i \quad (4.5)$$

$${}^A \underline{\Omega}^i = \underline{n}^i A \dot{q}^i \quad (4.6)$$

4.1.2. Winkelbeschleunigungen

Durch Differentiation bezüglich \underline{e}^0 erhält man aus (4.1) und (4.3) die absoluten Winkelbeschleunigungen von Rotor i und Arm i :

$$\begin{aligned} {}^R \underline{\alpha}^i &= \frac{d}{dt} {}^R \underline{\omega}^i \\ &= \frac{d}{dt} ({}^A \underline{\omega}^{i-1} + {}^R \underline{\Omega}^i) \\ &= {}^A \underline{\alpha}^{i-1} + \frac{d}{dt} {}^R \underline{\Omega}^i + {}^A \underline{\omega}^{i-1} \times {}^R \underline{\Omega}^i \end{aligned} \quad (4.7)$$

Wir führen die Abkürzung:

$${}^R \underline{H}^i = \frac{d}{dt} {}^R \underline{\Omega}^i = \underline{n}^i {}^R \ddot{q}^i \quad (4.8)$$

ein und schreiben für ${}^R \underline{\alpha}^i$:

$${}^R \underline{\alpha}^i = {}^A \underline{\alpha}^{i-1} + {}^R \underline{H}^i + {}^A \underline{\omega}^{i-1} \times {}^R \underline{\Omega}^i \quad (4.9)$$

Für den Arm i:

$$\begin{aligned}
 {}^A \underline{a}^i &= \frac{d}{dt} {}^A \underline{\omega}^i & (4.10) \\
 &= \frac{d}{dt} ({}^A \underline{\omega}^{i-1} + {}^A \underline{\Omega}^i) \\
 &= {}^A \underline{a}^{i-1} + {}^{i-1} \frac{d}{dt} {}^A \underline{\Omega}^i + {}^A \underline{\omega}^{i-1} \times {}^A \underline{\Omega}^i
 \end{aligned}$$

Analog zu (4.8) definieren wir:

$${}^A \underline{H}^i = {}^{i-1} \frac{d}{dt} {}^A \underline{\Omega}^i = \underline{n}^i {}^A \underline{\dot{g}}^i \quad (4.11)$$

Damit lautet der Ausdruck für ${}^A \underline{a}^i$:

$${}^A \underline{a}^i = {}^A \underline{a}^{i-1} + {}^A \underline{H}^i + {}^A \underline{\omega}^{i-1} \times {}^A \underline{\Omega}^i \quad (4.12)$$

4.1.3. Translatorische Geschwindigkeiten

Für die absolute Geschwindigkeit des Rotors i erhalten wir:

$${}^R \underline{V}^i = {}^A \underline{V}^{i-1} + {}^A \underline{\omega}^{i-1} \times \underline{b}^{i-1,i} \quad (4.13)$$

${}^A \underline{V}^0$ ist die Geschwindigkeit des ruhenden Sockels:

$${}^A \underline{V}^0 = \underline{0} \quad (4.14)$$

Für den Arm i schreiben wir zunächst den Ortsvektor an

$$\underline{A}_r^i = \underline{A}_r^{i-1} + \underline{c}^{i-1,i} - \underline{c}^{ii} \quad (4.15)$$

\underline{A}_v^i erhält man dann zu:

$$\underline{A}_v^i = \frac{d}{dt} \underline{A}_r^i \quad (4.16)$$

$$\underline{A}_v^i = \underline{A}_v^{i-1} + \underline{\omega}^{i-1} \times \underline{c}^{i-1,i} - \underline{\omega}^i \times \underline{c}^{ii} \quad (4.17)$$

4.1.4. Translatorische Beschleunigungen

Wir differenzieren (4.13) bzw. (4.17):

$$\underline{R}_a^i = \frac{d}{dt} \underline{R}_v^i \quad (4.18)$$

$$\underline{R}_a^i = \underline{a}^{i-1} + \underline{a}^{i-1} \times \underline{b}^{i-1,i} + \underline{\omega}^{i-1} \times (\underline{\omega}^{i-1} \times \underline{b}^{i-1,i}) \quad (4.19)$$

Und für den Arm:

$$\underline{A}_a^i = \frac{d}{dt} \underline{A}_v^i \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_a^i = & \underline{a}^{i-1} + \underline{a}^{i-1} \times \underline{c}^{i-1,i} \\ & + \underline{\omega}^{i-1} \times (\underline{\omega}^{i-1} \times \underline{c}^{i-1,i}) \\ & - \underline{a}^i \times \underline{c}^{ii} - \underline{\omega}^i \times (\underline{\omega}^i \times \underline{c}^{ii}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.2. Partielle Geschwindigkeiten

Wir kommen jetzt zur Berechnung der partiellen Geschwindigkeiten bzw. Winkelgeschwindigkeiten, die in (3.18) bzw. 3.19) definiert wurden.

4.2.1 Partiiellen Winkelgeschwindigkeiten

Mit (4.1), (4.4) und (4.5) erhalten wir für die r -te partielle Winkelgeschwindigkeit des Rotors i

$${}^R \underline{\omega}_r^i = \frac{\partial}{\partial q_r} {}^R \underline{\omega}^i \quad (4.22)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_r} [{}^A \underline{\omega}^{i-1} + {}^R \underline{\Omega}^i]$$

$${}^R \underline{\omega}_r^i = \frac{\partial}{\partial q_r} \left[\sum_{n=1}^{i-1} (\underline{n}^n {}^A g^n) + \underline{n}^i {}^R g^i \right]$$

Hier muß man zwei Fälle unterscheiden:

$$1. \quad 1 \leq r \leq N$$

$$1.1 \quad r \geq i \quad {}^R \underline{\omega}_r^i = \underline{0}$$

$$1.2 \quad r < i \quad {}^R \underline{\omega}_r^i = \underline{n}^r$$

$$2. \quad N < r \leq 2N$$

(4.23)

$$2.1 \quad r > i + N \quad {}^R \underline{\omega}_r^i = \underline{0}$$

$$2.2 \quad r = i + N \quad {}^R \underline{\omega}_r^i = \underline{n}^{r-N}$$

$$2.3 \quad r < i + N \quad {}^R \underline{\omega}_r^i = \underline{0}$$

Entsprechend für die partiellen Winkelgeschwindigkeiten der Arme mit (4.4) und (4.6):

$$\begin{aligned}
 {}^A \underline{\omega}_r^i &= \frac{\partial}{\partial q_r} \left[\sum_{n=1}^i {}^A \underline{\omega}^n \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_r} \left[\sum_{n=1}^i \underline{n}^n {}^A \underline{q}^n \right]
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Auch hier muß man wieder zwei Fälle unterscheiden:

$$1. \quad 1 \leq r \leq N$$

$$1.1 \quad r > i \quad {}^A \underline{\omega}_r^i = \underline{0} \tag{4.25}$$

$$1.2 \quad r \leq i \quad {}^A \underline{\omega}_r^i = \underline{n}^r$$

$$2. \quad N < r \leq 2N \quad {}^A \underline{\omega}_r^i = \underline{0}$$

4.2.2 Partielle translatorische Geschwindigkeiten

Die partielle Geschwindigkeit des Rotors i :

$${}^R \underline{v}_r^i = \frac{\partial}{\partial q_r} {}^R \underline{v}^i \tag{4.26}$$

mit (4.13):

$${}^R \underline{v}_r^i = \frac{\partial}{\partial q_r} \left[{}^A \underline{v}^{i-1} + {}^A \underline{\omega}^{i-1} \times \underline{b}^{i-1,i} \right] \tag{4.27}$$

Um (4.27) auszuwerten, muß man zunächst ${}^A \underline{v}^{i-1}$ als Funktion der q_r angeben.

Ausgehend vom Ortsvektor des Armes $i-1$

$$A_{\underline{r}}^{i-1} = \sum_{n=1}^{i-1} \underline{c}^{n-1 n} - \underline{c}^{nn} \quad (4.28)$$

erhalten wir:

$$A_{\underline{v}}^{i-1} = \sum_{n=1}^{i-1} A_{\underline{\omega}}^{n-1} \times \underline{c}^{n-1 n} - A_{\underline{\omega}}^n \times \underline{c}^{nn} \quad (4.29)$$

Mit (4.29) und (4.27) erhalten wir:

$$\begin{aligned} R_{\underline{v}}^i = & \frac{\partial}{\partial q_r} \left[\sum_{n=1}^{i-1} A_{\underline{\omega}}^{n-1} \times \underline{c}^{n-1 n} - A_{\underline{\omega}}^n \times \underline{c}^{nn} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial q_r} \left[A_{\underline{\omega}}^{i-1} \times \underline{b}^{i-1 i} \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Die $A_{\underline{\omega}}$ sind in (4.4) gegeben: Und mit (4.6) erhält man dann die partielle Geschwindigkeit des Rotors i , wobei wieder zwei Fälle zu unterscheiden sind:

1. $1 \leq r \leq N$

$$\begin{aligned} 1.1 \quad r \geq i & \quad R_{\underline{v}}^i = \underline{0} \\ 1.2 \quad r < i & \quad R_{\underline{v}}^i = \underline{n}^r \times \left[\sum_{n=r}^{i-2} (-\underline{c}^{nn} + \underline{c}^{nn+1}) \right. \\ & \quad \left. - \underline{c}^{i-1 i-1} + \underline{b}^{i-1 i} \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$2. \quad N < r \leq 2N \quad R_{\underline{v}}^i = \underline{0}$$

Wir führen noch ein:

$$\underline{\beta}^{ri} = \left[\sum_{n=r}^{i-2} (-\underline{c}^{nn} + \underline{c}^{nn+1}) - \underline{c}^{i-1 i-1} + \underline{b}^{i-1 i} \right] \quad (4.32)$$

Für die partiellen Geschwindigkeiten des Armes i gilt:

$$\begin{aligned} {}^A \underline{v}_r^i &= \frac{\partial}{\partial q_r} {}^A \underline{v}^i \\ &= \frac{\partial}{\partial q_r} \left[\sum_{n=1}^i {}^A \underline{\omega}^{n-1} \times \underline{c}^{n-1 n} - {}^A \underline{\omega}^n \times \underline{c}^{nn} \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

Daraus folgt:

$$1. \quad 1 \leq r \leq N$$

$$1.1 \quad r > i \quad {}^A \underline{v}_r^i = \underline{0}$$

$$1.2 \quad r \leq i \quad {}^A \underline{v}_r^i = \underline{n}^r \times \left[\sum_{n=r}^{i-1} (-\underline{c}^{nn} + \underline{c}^{nn+1}) - \underline{c}^{ii} \right] \quad (4.34)$$

$$2. \quad N < r \leq 2N \quad {}^A \underline{v}_r^i = \underline{0}$$

Mit

$$\underline{\gamma}^{ri} = \left[\sum_{n=r}^{i-1} (-\underline{c}^{nn} + \underline{c}^{nn+1}) - \underline{c}^{ii} \right] \quad (4.35)$$

Zum besseren Verständnis von (4.31) und (4.33) geben wir ein Beispiel.

Da

$${}^A \underline{v}^i = \sum_{r=1}^{2N} {}^A \underline{v}_r^i q_r \quad (4.36)$$

lassen sich die $\underline{A}_{\underline{v}_r}^i$ als "Richtungsangabe" für den Beitrag der jeweiligen generalisierten Koordinate g_r zu $\underline{A}_{\underline{v}}^i$ deuten. Entsprechendes gilt für die $\underline{R}_{\underline{v}_r}^i$ und auch für die $\underline{A}_{\underline{\omega}_r}^i$ und $\underline{R}_{\underline{\omega}_r}^i$.

Wir wollen beispielhaft $\underline{A}_{\underline{v}_2}^3$ berechnen. Nach (4.34):

$$\underline{A}_{\underline{v}_2}^3 = \underline{n}^2 \times [-\underline{c}^{22} + \underline{c}^{23} - \underline{c}^{33}] = \underline{n}^2 \times \underline{\gamma}^{23}$$

Wie ein Vergleich mit Bild 4-1 zeigt, ist $\underline{A}_{\underline{v}_2}^3$ nichts anderes als das Kreuzprodukt des Achsvektors \underline{n}^2 mit dem Abstandsvektor $\underline{\gamma}^{23}$ von Achse 2 zum Massenzentrum des Armes 3.

5. Dynamik

Wir werten jetzt (3.20) aus.

In Abschnitt 5.1 berechnen wir die rechte Seite von (3.20). Diese liefert λ und den Beitrag χ^G der Gewichtskräfte zu χ .

In 5.2 bestimmen wir aus der linken Seite von (3.20) die Massenmatrix J und den Beitrag χ^K der Kreiselkräfte zu χ .

5.1. Innere und äußere Kräfte und Momente

Für den Beitrag der inneren und äußeren Kräfte zur r -ten Zeile von (3.14) bzw. (3.16) erhält man, (vgl. (3.20)):

$$\mathcal{F}_r = \sum_{i=1}^N A_{\underline{V}_r^i} \cdot A_{\underline{F}^i} + R_{\underline{V}_r^i} \cdot R_{\underline{F}^i} + A_{\underline{\omega}_r^i} \cdot A_{\underline{L}^i} + R_{\underline{\omega}_r^i} \cdot R_{\underline{L}^i} \quad (5.1)$$

\mathcal{F}_r läßt sich aufteilen:

$$\mathcal{F}_r = \chi_r^G + \lambda_r \quad (5.2)$$

entsprechend dem Beitrag der Gewichtskräfte zu χ_r und dem Beitrag der eingepägten Momente zu λ_r .

$$\chi_r^G = \sum_{i=1}^N A_{\underline{V}_r^i} \cdot A_{\underline{F}^i} + R_{\underline{V}_r^i} \cdot R_{\underline{F}^i} \quad (5.3)$$

$$\lambda_r = \sum_{i=1}^N A_{\underline{\omega}_r^i} \cdot A_{\underline{L}^i} + R_{\underline{\omega}_r^i} \cdot R_{\underline{L}^i} \quad (5.4)$$

Mit Hilfe von (3.7) und (3.8) und den partiellen Winkelgeschwindigkeiten aus dem Unterabschnitt 4.2.1 wollen wir zunächst (5.4) auswerten:

$$\underline{1.} \quad 1 \leq r \leq N$$

$$\begin{aligned} \lambda_r &= \sum_{i=r+1}^N \underline{n}^r \cdot {}^R \underline{L}^i + \sum_{i=r}^N \underline{n}^r \cdot {}^A \underline{L}^i \\ &= \underline{n}^r \cdot \left\{ \sum_{i=r+1}^N \left[\underline{L}^i - \underline{M}^i + \ddot{u}^i \underline{M}^i + \underline{Q}^i \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \underline{Q}^{i+1} - \underline{L}^{i+1} + (\ddot{u}^{i+1} - 1) \underline{M}^{i+1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\ddot{u}^r \underline{M}^r + \underline{Q}^r - \underline{Q}^{r+1} - \underline{L}^{r+1} + (\ddot{u}^{r+1} - 1) \underline{M}^{r+1} \right] \right\} \end{aligned}$$

Führt man diese Summe aus und berücksichtigt:

$$\underline{M}^r = \underline{n}^r M^r$$

$$\underline{Q}^r = \underline{n}^r Q^r$$

(5.5)

$$\underline{L}^r = \underline{n}^r L^r$$

vgl. Bilder 3-3 und 3-5, so erhält man:

$$\lambda_r = Q^r + \ddot{u}^r M^r$$

$$\underline{2. \quad N < r \leq 2N}$$

$$\lambda_r = \underline{n}^{r-N} \cdot [\underline{L}^{r-N} - \underline{M}^{r-N}]$$

Mit (5.5) :

$$\lambda_r = L^{r-N} - M^{r-N}$$

$$\lambda_r = \begin{cases} Q^r + \ddot{u}^r M^r & 1 \leq r \leq N \\ L^{r-N} - M^{r-N} & N < r \leq 2N \end{cases}$$

(5.6)

Als nächstes ermitteln wir den Beitrag der Gewichtskräfte:

Mit (3.1), (3.2) und den partiellen Geschwindigkeiten läßt sich χ_r^G berechnen:

Wie man aus (4.31) und (4.34) erkennt, gilt:

$${}^R \underline{v}_r^i = {}^A \underline{v}_r^{i-1} + \underline{n}^r \times \underline{b}^{i-1,i} \quad (5.7)$$

$$r \leq N, \quad r < i$$

Wir schreiben jetzt für χ_r^G :

1. $1 \leq r \leq N$

$$\chi_r^G = \sum_{i=r}^N {}^R \underline{v}_r^{i+1} \cdot {}^R \underline{F}^{i+1} + {}^A \underline{v}_r^i \cdot {}^A \underline{F}^i$$

Anmerkung: Alle mit (N+1) indizierten Größen verschwinden, da es keinen (N+1)-ten Rotor gibt.

Mit (5.7):

$$\begin{aligned} \chi_r^G &= \sum_{i=r}^N \left[({}^A \underline{v}_r^i + \underline{n}^r \times \underline{b}^{i,i+1}) \cdot {}^R \underline{F}^{i+1} + {}^A \underline{v}_r^i \cdot {}^A \underline{F}^i \right] \\ &= \sum_{i=r}^N \left[{}^A \underline{v}_r^i \cdot ({}^R \underline{F}^{i+1} + {}^A \underline{F}^i) + (\underline{n}^r \times \underline{b}^{i,i+1}) \cdot {}^R \underline{F}^{i+1} \right] \end{aligned}$$

Setzen wir (3.1) und (3.2) ein, und:

$${}^A \underline{v}_r^i = \underline{n}^r \times \underline{\gamma}^{ri}$$

kann man χ_r^G umformen:

$$\chi_r^G = \sum_{i=r}^N \left[(\underline{n}^r \times \underline{\gamma}^{ri}) \cdot (R m^{i+1} + A m^i) \underline{g} + (\underline{n}^r \times \underline{b}^{ii+1}) \cdot R m^{i+1} \underline{g} \right]$$

Mit:

$$m^i = R m^{i+1} + A m^i \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \chi_r^G &= \sum_{i=r}^N \left\{ \underline{n}^r \times \left[\underline{\gamma}^{ri} m^i + \underline{b}^{ii+1} R m^{i+1} \right] \right\} \cdot \underline{g} \\ &= \sum_{i=r}^N \left\{ \underline{n}^r \times \left[\underline{\gamma}^{ri} + \frac{R m^{i+1}}{m^i} \underline{b}^{ii+1} \right] m^i \right\} \cdot \underline{g} \end{aligned}$$

Wir haben die Gewichtskraftwirkungen von Arm i und dem in ihm eingebetteten Rotor $i+1$ zur Wirkung der Gewichtskraft eines Gesamtarmes i zusammengefaßt. Wir folgen hier dem Gyrostatenkonzept [4].

Wir definieren:

Der Gesamtarm i ist ein Körper, dessen Massenmittelpunkt CM^i mit dem Gesamt-massenmittelpunkt von Arm i und Rotor $i+1$ zusammenfällt.

Für seine Masse m^i gilt (5.8).

$$2. \quad N < r \leq 2N$$

$$x_r^G = 0$$

Somit

$$x_r^G = \begin{cases} \sum_{i=r}^N \left\{ \underline{n}^r \times \left[\underline{\gamma}^{ri} + \frac{{}^R m^{i+1}}{m^i} \underline{b}^{ii+1} \right] m^i \right\} \cdot \underline{g} & r \leq N \\ 0 & r > N \end{cases} \quad (5.9)$$

5.2. Trägheitskräfte

Für den Beitrag der Trägheitskräfte zur r -ten Zeile von (3.14) erhalten wir, vgl. (3.20):

$$\mathcal{F}_r^* = \sum_{i=1}^N \underline{A}_r^i \cdot \underline{A}^{\dot{p}^i} + \underline{V}_r^i \cdot \underline{R}^{\dot{p}^i} + \underline{\omega}_r^i \cdot \underline{A}^{\dot{H}^i} + \underline{\omega}_r^i \cdot \underline{R}^{\dot{H}^i} \quad (5.10)$$

Man kann \mathcal{F}_r^* aufteilen:

$$\mathcal{F}_r^* = (\mathcal{F} \dot{g})_r - \mathcal{K}_r^k \quad (5.11)$$

Wir wollen (5.10) auswerten; dazu teilen wir auf in Beiträge der Impulse \underline{P}_r^* und Beiträge der Drehimpulse \underline{H}_r^* .

5.2.1. Beiträge der Impulse

Wir schreiben:

$${}^P \mathcal{F}_r^* = \sum_{i=1}^N {}^R \underline{v}_r^i \cdot {}^R \dot{\underline{p}}^i + {}^A \underline{v}_r^i \cdot {}^A \dot{\underline{p}}^i \quad (5.12)$$

Mit (3.17), (4.31) und (4.34) können wir (5.12) auswerten. Wir müssen hier wieder unterscheiden.

1. $1 \leq r \leq N$

$${}^P \mathcal{F}_r^* = \sum_{i=r}^N {}^R \underline{v}^{i+1} \cdot {}^R \underline{m}^{i+1} \cdot {}^R \underline{a}^{i+1} + {}^A \underline{v}_r^i \cdot {}^A \underline{m}^i \cdot {}^A \underline{a}^i$$

Anmerkung: Alle mit $(N+1)$ indizierten Größen verschwinden, da es keinen $(N+1)$ -ten Rotor gibt.

Mit (5.7), (4.19) und (4.21):

$$\begin{aligned} {}^P \mathcal{F}_r^* = \sum_{i=r}^N & \left[\left({}^A \underline{v}_r^i + \underline{n}^r \times \underline{b}^{i i+1} \right) {}^R \underline{m}^{i+1} \right. \\ & \cdot \left({}^A \underline{a}^i + {}^A \underline{a}^i \times \underline{b}^{i i+1} + {}^A \underline{\omega}^i \times \left({}^A \underline{\omega}^i \times \underline{b}^{i i+1} \right) \right) \\ & \left. + {}^A \underline{v}_r^i \cdot {}^A \underline{m}^i \cdot {}^A \underline{a}^i \right] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Um hier wieder das Gesamtarmkonzept verwenden zu können, müssen wir noch einige Umformungen vornehmen. Wir führen dazu ein:

$$\underline{\delta}^i = \frac{{}^R m^{i+1}}{m^i} \underline{b}^{i i+1} \quad (5.14)$$

$$\underline{\varepsilon}^i = \frac{A m^i}{m^i} \underline{b}^{i i+1} \quad (5.15)$$

$\underline{\delta}^i$ ist der Vektor von A_{CM}^i nach CM^i .

$\underline{\varepsilon}^i$ ist der Vektor von CM^i nach ${}^R CM^{i+1}$.
Vgl. Bild 3-4.

$$\underline{v}_r^i = A \underline{v}_r^i + \underline{n}^r \times \underline{\delta}^i \quad (5.16)$$

r-te partielle Geschwindigkeit des Gesamtarmes.

$$\underline{a}^i = A \underline{a}^i + A \underline{\alpha}^i \times \underline{\delta}^i + A \underline{\omega}^i \times (A \underline{\omega}^i \times \underline{\delta}^i) \quad (5.17)$$

Beschleunigung des Gesamtarmes.

Wir setzen (5.14) bis (5.17) in (5.13) ein:

$$\begin{aligned} {}^P \mathcal{F}_r^* = & \sum_{i=r}^N \left\{ \left[\underline{v}_r^i - \underline{n}^r \times \underline{\delta}^i + \underline{n}^r \times \underline{\delta}^i + \underline{n}^r \times \underline{\varepsilon}^i \right] {}^R m^{i+1} \right. \\ & \cdot \left[\underline{a}^i - A \underline{\alpha}^i \times \underline{\delta}^i - A \underline{\omega}^i \times (A \underline{\omega}^i \times \underline{\delta}^i) + A \underline{\alpha}^i \times \underline{\delta}^i + A \underline{\alpha}^i \times \underline{\varepsilon}^i \right. \\ & \quad \left. \left. + A \underline{\omega}^i \times (A \underline{\omega}^i \times \underline{\delta}^i) + A \underline{\omega}^i \times (A \underline{\omega}^i \times \underline{\varepsilon}^i) \right] \right. \\ & \left. + \left[\underline{v}_r^i - \underline{n}^r \times \underline{\delta}^i \right] A m^i \cdot \left[\underline{a}^i - A \underline{\alpha}^i \times \underline{\delta}^i - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. A \underline{\omega}^i \times (A \underline{\omega}^i \times \underline{\delta}^i) \right] \right\} \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
 {}^p\mathcal{F}_r^* &= \sum_{i=r}^N \left\{ [\underline{v}_r^i + \underline{n}^r \times \underline{\varepsilon}^i] {}^R m^{i+1} \cdot [\underline{a}^i + {}^A \underline{a}^i \times \underline{\varepsilon}^i + {}^A \underline{\omega}^i \times ({}^A \underline{\omega}^i \times \underline{\varepsilon}^i)] \right. \\
 &\quad \left. + [\underline{v}_r^i - \underline{n}^r \times \underline{\delta}^i] {}^A m^i \cdot [\underline{a}^i - {}^A \underline{a}^i \times \underline{\delta}^i - {}^A \underline{\omega}^i \times ({}^A \underline{\omega}^i \times \underline{\delta}^i)] \right\} \\
 &= \sum_{i=r}^N \underline{v}_r^i ({}^R m^{i+1} + {}^A m^i) \cdot \underline{a}^i \\
 &\quad + \sum_{i=r}^N [(\underline{n}^r \times \underline{\varepsilon}^i) {}^R m^{i+1} - (\underline{n}^r \times \underline{\delta}^i) {}^A m^i] \cdot \underline{a}^i \\
 &\quad + \sum_{i=r}^N \left\{ \underline{v}_r^i \cdot [{}^R m^{i+1} ({}^A \underline{a}^i \times \underline{\varepsilon}^i + {}^A \underline{\omega}^i \times ({}^A \underline{\omega}^i \times \underline{\varepsilon}^i)) \right. \\
 &\quad \left. - {}^A m^i ({}^A \underline{a}^i \times \underline{\delta}^i + {}^A \underline{\omega}^i \times ({}^A \underline{\omega}^i \times \underline{\delta}^i))] \right\} \\
 &\quad + \sum_{i=r}^N [(\underline{n}^r \times \underline{\varepsilon}^i) {}^R m^{i+1} \cdot ({}^A \underline{a}^i \times \underline{\varepsilon}^i + {}^A \underline{\omega}^i \times ({}^A \underline{\omega}^i \times \underline{\varepsilon}^i)) \\
 &\quad - (\underline{n}^r \times \underline{\delta}^i) {}^A m^i \cdot (-{}^A \underline{a}^i \times \underline{\delta}^i - {}^A \underline{\omega}^i \times ({}^A \underline{\omega}^i \times \underline{\delta}^i))]
 \end{aligned}$$

Wie man leicht erkennt, vgl. (5.14), (5.15), bleibt nur die erste Teilsumme stehen, die drei letzten verschwinden.

2. $N < r \leq 2N$

$${}^P \tilde{\mathcal{F}}_r^* = 0$$

Somit:

$${}^P \tilde{\mathcal{F}}_r^* = \begin{cases} \sum_{i=r}^N \underline{v}_r^i m^i \cdot \underline{a}^i & r \leq N \\ 0 & r > N \end{cases} \quad (5.18)$$

Dies bedeutet, der Gesamtimpuls von Rotor $i+1$ und Arm i ist mit dem Impuls des Gesamtarmes i identisch.

5.2.2. Beiträge der Drehimpulse

$${}^H \tilde{\mathcal{F}}_r^* = \sum_{i=1}^N \left({}^R \underline{\omega}_r^i \cdot {}^R \underline{\dot{H}}^i + {}^A \underline{\omega}_r^i \cdot {}^A \underline{\dot{H}}^i \right) \quad (5.19)$$

1. $1 \leq r \leq N$

$${}^H \tilde{\mathcal{F}}_r^* = \sum_{i=r}^N \left\{ \underline{n}^r \cdot \left[{}^R \underline{\underline{I}}^{i+1} \cdot {}^R \underline{\dot{\alpha}}^{i+1} + {}^R \underline{\omega}^{i+1} \times \left({}^R \underline{\underline{I}}^{i+1} \cdot {}^R \underline{\omega}^{i+1} \right) \right] \right. \\ \left. + \underline{n}^r \cdot \left[{}^A \underline{\underline{I}}^i \cdot {}^A \underline{\dot{\alpha}}^i + {}^A \underline{\omega}^i \times \left({}^A \underline{\underline{I}}^i \cdot {}^A \underline{\omega}^i \right) \right] \right\} \quad (5.20)$$

Mit (4.1) und (4.9) lassen sich $\underline{R}_{\underline{\alpha}}^{i+1}$ und $\underline{R}_{\underline{\omega}}^{i+1}$ durch $\underline{A}_{\underline{\alpha}}^i$ bzw. $\underline{A}_{\underline{\omega}}^i$ ausdrücken.

$$\begin{aligned} {}^H\mathcal{F}_r^* = \underline{n}^r \cdot \sum_{i=r}^N \left\{ \left[\underline{R}_{\underline{\Gamma}}^{i+1} \cdot \left(\underline{A}_{\underline{\alpha}}^i + \underline{R}_{\underline{H}}^{i+1} + \underline{A}_{\underline{\omega}}^i \times \underline{R}_{\underline{\Omega}}^{i+1} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\underline{A}_{\underline{\omega}}^i + \underline{R}_{\underline{\Omega}}^{i+1} \right) \times \left(\underline{R}_{\underline{\Gamma}}^{i+1} \cdot \left(\underline{A}_{\underline{\omega}}^i + \underline{R}_{\underline{\Omega}}^{i+1} \right) \right) \right] \right. \\ \left. + \left[\underline{A}_{\underline{\Gamma}}^i \cdot \underline{A}_{\underline{\alpha}}^i + \underline{A}_{\underline{\omega}}^i \times \left(\underline{A}_{\underline{\Gamma}}^i \cdot \underline{A}_{\underline{\omega}}^i \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Diese Summe spalten wir auf in eine Teilsumme X_{r1} , die alle Terme enthält die mit $\underline{A}_{\underline{\alpha}}^i$ bzw. $\underline{R}_{\underline{H}}^{i+1}$ gehen und den Rest, X_{r2} .

$${}^H\mathcal{F}_r^* = X_{r1} + X_{r2} \quad (5.21)$$

Es ist klar, daß X_{r1} sowohl Beiträge zu $(J \dot{g})_r$ als auch zu \underline{x}_r^K liefert, während X_{r2} nur zu \underline{x}_r^K beiträgt.

$$X_{r1} = \underline{n}^r \cdot \sum_{i=r}^N \left[\underline{R}_{\underline{\Gamma}}^{i+1} \cdot \underline{A}_{\underline{\alpha}}^i + \underline{A}_{\underline{\Gamma}}^i \cdot \underline{A}_{\underline{\alpha}}^i + \underline{R}_{\underline{\Gamma}}^{i+1} \cdot \underline{R}_{\underline{H}}^{i+1} \right]$$

Gemäß Steiner'schem Satz kann man $\underline{R}_{\underline{\Gamma}}^{i+1}$ und $\underline{A}_{\underline{\Gamma}}^i$ zu einem Gesamtträgheitstensor bezüglich CM^i zusammenfassen.

Daher:

$$X_{r1} = \underline{n}^r \cdot \sum_{i=r}^N \underline{\underline{I}}^i \cdot \underline{A} \underline{\underline{\omega}}^i + \underline{n}^r \cdot \sum_{i=r}^N {}^R \underline{\underline{I}}^{i+1} \cdot {}^R \underline{\underline{\Omega}}^{i+1} \quad (5.22)$$

Wie man sofort erkennt, liefert die erste Teilsumme Beiträge zu $({}^{AA}J \ \underline{A} \dot{\underline{g}})_r$ und zu χ_r^K , während die zweite Teilsumme $({}^{AR}J \ \underline{R} \dot{\underline{g}})_r$ aufbaut.

Wir betrachten nun X_{r2} :

$$\begin{aligned} X_{r2} = \underline{n}^r \cdot \sum_{i=r}^N & \left[{}^R \underline{\underline{I}}^{i+1} \cdot (\underline{A} \underline{\underline{\omega}}^i \times {}^R \underline{\underline{\Omega}}^{i+1}) \right. \\ & + \underline{A} \underline{\underline{\omega}}^i \times ({}^R \underline{\underline{I}}^{i+1} \cdot \underline{A} \underline{\underline{\omega}}^i) + \underline{A} \underline{\underline{\omega}}^i \times ({}^R \underline{\underline{I}}^{i+1} \cdot {}^R \underline{\underline{\Omega}}^{i+1}) \\ & + {}^R \underline{\underline{\Omega}}^{i+1} \times ({}^R \underline{\underline{I}}^{i+1} \cdot \underline{A} \underline{\underline{\omega}}^i) + {}^R \underline{\underline{\Omega}}^{i+1} \times ({}^R \underline{\underline{I}}^{i+1} \cdot {}^R \underline{\underline{\Omega}}^{i+1}) \\ & \left. + \underline{A} \underline{\underline{\omega}}^i \times (\underline{A} \underline{\underline{I}} \cdot \underline{A} \underline{\underline{\omega}}^i) \right] \end{aligned}$$

Wie man leicht zeigen kann (im Dreibein \underline{e}^{i+1}) verschwindet der Term ${}^R \underline{\underline{\Omega}}^{i+1} \times ({}^R \underline{\underline{I}}^{i+1} \cdot {}^R \underline{\underline{\Omega}}^{i+1})$ für alle i .

Ferner kann man $\underline{A} \underline{\underline{\omega}}^i \times ({}^R \underline{\underline{I}}^{i+1} \cdot \underline{A} \underline{\underline{\omega}}^i)$ und $\underline{A} \underline{\underline{\omega}}^i \times (\underline{A} \underline{\underline{I}} \cdot \underline{A} \underline{\underline{\omega}}^i)$ zum Beitrag des Gesamtarmes zusammenfassen.

$$X_{r2} = \underline{n}^r \cdot \sum_{i=r}^N [\underline{A} \underline{\omega}^i \times (\underline{I}^i \cdot \underline{A} \underline{\omega}^i)]$$

$$+ \underline{n}^r \cdot \sum_{i=r}^N [\underline{R} \underline{I}^{i+1} \cdot (\underline{A} \underline{\omega}^i \times \underline{R} \underline{\Omega}^{i+1})$$

$$+ \underline{A} \underline{\omega}^i \times (\underline{R} \underline{I}^{i+1} \cdot \underline{R} \underline{\Omega}^{i+1})$$

$$+ \underline{R} \underline{\Omega}^{i+1} \times (\underline{R} \underline{I}^{i+1} \cdot \underline{A} \underline{\omega}^i)]$$

(5.23)

2. $N < r \leq 2N$

Für diesen Fall gilt:

$${}^H \mathcal{F}_r^* = \underline{n}^{r-N} \cdot [\underline{R} \underline{I}^{r-N} \cdot \underline{R} \underline{\Omega}^{r-N} + \underline{R} \underline{\omega}^{r-N} \times (\underline{R} \underline{I}^{r-N} \cdot \underline{R} \underline{\omega}^{r-N})]$$

Auch hier spalten wir wieder auf in eine Teilsumme Y_{r1} , die den Term enthält, der mit $\underline{R} \underline{\Omega}^{r-N}$ geht und den Rest Y_{r2} .

$${}^H \mathcal{F}_r^* = Y_{r1} + Y_{r2} \quad (5.24)$$

Es ist klar, daß Y_{r1} zu $(J \dot{g})_r$ und zu χ_r^K beiträgt, während Y_{r2} nur zu λ_r^K beiträgt.

$$Y_{r1} = \underline{n}^{r-N} \cdot \left[{}^R \underline{I}^{r-N} \cdot \left({}^A \underline{\alpha}^{r-N-1} + {}^R \underline{H}^{r-N} + {}^A \underline{\omega}^{r-N-1} \times {}^R \underline{\Omega}^{r-N} \right) \right] \quad (5.25)$$

Für ${}^A \underline{\alpha}^{r-N-1}$ kann man aus (4.12) ableiten:

$${}^A \underline{\alpha}^{r-N-1} = \sum_{n=1}^{r-N-1} {}^A \underline{H}^n + \sum_{n=1}^{r-N-1} {}^A \underline{\omega}^{n-1} \times {}^A \underline{\Omega}^n \quad (5.26)$$

Wir setzen (5.26) in (5.25) ein:

$$\begin{aligned} Y_{r1} = \underline{n}^{r-N} \cdot \left[{}^R \underline{I}^{r-N} \cdot \sum_{n=1}^{r-N-1} {}^A \underline{H}^n + {}^R \underline{I}^{r-N} \cdot {}^R \underline{H}^{r-N} \right. \\ \left. + {}^R \underline{I}^{r-N} \cdot \left(\sum_{n=1}^{r-N-1} \left({}^A \underline{\omega}^{n-1} \times {}^A \underline{\Omega}^n \right) \right. \right. \\ \left. \left. + {}^A \underline{\omega}^{r-N-1} \times {}^R \underline{\Omega}^{r-N} \right) \right] \quad (5.27) \end{aligned}$$

Für Y_{r2} erhalten wir mit (4.1):

$$\begin{aligned} Y_{r2} = \underline{n}^{r-N} \cdot \left[\left({}^A \underline{\omega}^{r-N-1} + {}^R \underline{\Omega}^{r-N} \right) \times \left({}^R \underline{I}^{r-N} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \left({}^A \underline{\omega}^{r-N-1} + {}^R \underline{\Omega}^{r-N} \right) \right) \right] \quad (5.28) \end{aligned}$$

Wir wollen Y_{r2} noch etwas näher untersuchen.

$$\begin{aligned}
 Y_{r2} = & \underline{n}^{r-N} \cdot \left[\underline{A} \underline{\omega}^{r-N-1} \times \left({}^R \underline{I}^{r-N} \cdot \underline{A} \underline{\omega}^{r-N-1} \right) \right] \\
 & + \underline{n}^{r-N} \cdot \left[\underline{A} \underline{\omega}^{r-N-1} \times \left({}^R \underline{I}^{r-N} \cdot {}^R \underline{\Omega}^{r-N} \right) \right. \\
 & \quad \left. + {}^R \underline{\Omega}^{r-N} \times \left({}^R \underline{I}^{r-N} \cdot \underline{A} \underline{\omega}^{r-N-1} \right) \right. \\
 & \quad \left. + {}^R \underline{\Omega}^{r-N} \times \left({}^R \underline{I}^{r-N} \cdot {}^R \underline{\Omega}^{r-N} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Wie man im Dreibein ${}^R \underline{e}^{r-N}$ leicht zeigen kann, verschwindet der zweite Summand in Y_{r2} wegen der Rotationssymmetrie des Rotors. Daher:

$$Y_{r2} = \underline{n}^{r-N} \cdot \left[\underline{A} \underline{\omega}^{r-N-1} \times \left({}^R \underline{I}^{r-N} \cdot \underline{A} \underline{\omega}^{r-N-1} \right) \right] \quad (5.29)$$

Somit:

$${}^H \underline{f}_r^* = \begin{cases} X_{r1} + X_{r2} & 1 \leq r \leq N \\ Y_{r1} + Y_{r2} & N < r \leq 2N \end{cases} \quad (5.30)$$

Sowohl X_{r1} als auch X_{r2} sind in einer Form dargestellt, in der man klar den Einfluß der Bewegung der Gesamtarme von der Relativbewegung der Rotoren bezüglich der Arme unterscheiden kann.

6. Interpretation der Ergebnisse

Aus den Gleichungen (5.6), (5.9), (5.18), (5.22), (5.23), (5.27) und (5.29) kann man die Bewegungsgleichungen (3.16) aufbauen.

Dazu geht man wie folgt vor.

- Man generiere die Bewegungsgleichungen für den Roboter, als ob er nur aus Gesamtarmen bestünde. Dies liefert Bewegungsgleichungen in der Form:

$$\tilde{J}^A \dot{q} = \tilde{\chi}^k + \tilde{\chi}^q + \tilde{\lambda} \quad (6.1)$$

(6.1) hat, im Gegensatz zu (3.16), nur die Ordnung N .

- Man berücksichtige den Einfluß der Rotoren auf das MKS durch Zusatzterme.

Wie man aus obigen Formeln erkennt gilt:

$$A^A \tilde{J} = \tilde{J} \quad (6.2)$$

$$A^A \tilde{\chi}^q = \tilde{\chi}^q \quad (6.3)$$

$$A^A \tilde{\chi}^k = \tilde{\chi}^k + \hat{\chi}^k \quad (6.4)$$

$$A^A \tilde{\lambda} = \tilde{\lambda} \quad (6.5)$$

Man sieht, daß die Rotoren sich nur in folgenden Teilmatrizen bemerkbar machen:

- $\hat{\chi}^k$
- ${}^{AR}\underline{J} = ({}^RA\underline{J})^T$
- ${}^R\chi^k$
- ${}^R\chi^G$
- ${}^{RR}\underline{J}$

Wir geben jetzt die Berechnungsvorschrift für diese Teilmatrizen an.

1. $\hat{\chi}^k$

Aus (5.23) kann man ablesen:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_\gamma^k = & -\underline{n}^\gamma \cdot \sum_{i=\gamma}^N \left[{}^R\underline{I}^{i+1} \cdot ({}^A\underline{\omega}^i \times {}^R\underline{\Omega}^{i+1}) \right. \\ & \left. + {}^A\underline{\omega}^i \times ({}^R\underline{I}^{i+1} \cdot {}^R\underline{\Omega}^{i+1}) + {}^R\underline{\Omega}^{i+1} \times ({}^R\underline{I}^{i+1} \cdot {}^A\underline{\omega}^i) \right] \quad (6.6) \end{aligned}$$

$\gamma = 1, \dots, N$

2. ${}^{AR}\underline{J}$

Aus (5.22):

$$({}^{AR}\underline{J} \cdot {}^R\dot{\underline{g}})_\gamma = \underline{n}^\gamma \cdot \sum_{i=\gamma}^N {}^R\underline{I}^{i+1} \cdot \underline{n}^{i+1} \cdot {}^R\dot{\underline{g}}^{i+1}$$

Hieraus folgt für das Element ${}^{AR}\underline{J}_{\gamma l}$:

$${}^{AR}\underline{J}_{\gamma l} = \begin{cases} \underline{n}^\gamma \cdot {}^R\underline{I}^l \cdot \underline{n}^l & l > \gamma \\ 0 & l \leq \gamma \end{cases} \quad (6.7)$$

$\gamma = 1, \dots, N \quad ; \quad l = 1, \dots, N$

3. RA_J

Aus (5.27):

$$(RA_J \dot{A} \dot{g})_v = \underline{n}^v \cdot \left[{}^R \underline{I}^v \cdot \sum_{n=1}^{v-1} \underline{n}^n \cdot A \dot{g}^n \right]$$

Hieraus folgt für das Element $RA_{J_{vl}}$:

$$RA_{J_{vl}} = \begin{cases} \underline{n}^v \cdot {}^R \underline{I}^v \cdot \underline{n}^l & l < v \\ 0 & l \geq v \end{cases} \quad (6.8)$$

$$v = 1, \dots, N \quad ; \quad l = 1, \dots, N$$

4. R_X^K

Aus (5.27) und (5.29):

$${}^R \chi_v^k = -\underline{n}^v \cdot \left[{}^R \underline{I}^v \cdot \sum_{n=1}^{v-1} (A \underline{\omega}^{n-1} \times A \underline{\Omega}^n) \right. \\ \left. + A \underline{\omega}^{v-1} \times {}^R \underline{\Omega}^v + A \underline{\omega}^{v-1} \times ({}^R \underline{I}^v \cdot A \underline{\omega}^{v-1}) \right] \quad (6.9)$$

$$v = 1, \dots, N$$

5. R_X^G

Aus (5.18):

$${}^R \chi_v^G = 0 \quad (6.10)$$

$$v = 1, \dots, N$$

6. RR_J

Aus (5.27):

$$(RR_J^R \dot{q})_v = \underline{n}^v \cdot {}^R \underline{I}^v \cdot \underline{n}^v \dot{q}^v$$

Hieraus folgt für das Element $RR_{J_{vl}}$:

$$RR_{J_{vl}} = \begin{cases} \underline{n}^v \cdot {}^R \underline{I}^v \cdot \underline{n}^v & l=v \\ 0 & l \neq v \end{cases} \quad (6.11)$$

A_λ und R_λ sind in (5.6) angegeben.

Zusammenfassend kann man sagen:

- Wir denken uns den Roboter nur aus Gesamtarmen aufgebaut.
Ein Gesamarm ist ein Körper, der aus dem Arm und dem darin eingebetteten Rotor entsteht, wenn man den Rotor im Arm "festklemmt".
Zu diesem nur aus Gesamtarmen bestehenden MKS generieren wir die Bewegungsgleichungen (6.1).
Auf diese Weise können wir AA_J , A_X^G und \tilde{x}^K aufbauen.
- In den Matrizen \tilde{x}^K , AR_J , RA_J , R_X^K , RR_J werden die Trägheitseffekte der Relativbewegungen zwischen Armen und Rotoren berücksichtigt.
- Rotoren und Arme sind über Kraftgesetze, vgl. (5.6), miteinander verbunden.

7. Ansätze zur Modellreduktion

In Kapitel 6 haben wir die Berechnungsvorschrift für alle Teilmatrizen aus (3.16) angegeben.

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, wie man von (3.16) zu einer einfacheren Systembeschreibung kommen kann. In Kapitel 6 wurde bereits angedeutet, daß man sich das Gesamtsystem aus zwei Teil-MKS zusammengesetzt denken kann.

- Den Gesamtarmen
- Den Rotoren.

Diese beiden Teil-MKS sind auf zwei Arten gekoppelt:

1. Über Trägheitseffekte, d.h. über die Matrizen ${}^A R_J$, ${}^R A_J$, $\dot{\lambda}^K$ und ${}^R \chi^K$.
2. Über die Kraftgesetze der Antriebsstränge, d.h. über die Matrix λ .

Bei heutiger Bauweise der Roboter haben die Rotoren wesentlich kleinere Trägheitsmomente als die Arme, bzw. Gesamtarme. Der Drehimpuls der Rotoren ist daher wesentlich geringer als der der Arme. Dies soll an einem Zahlenbeispiel verdeutlicht werden.

Die angenommenen Größenordnungen basieren auf Daten käuflicher Roboter.

I_A	=	10 kg m ²	-	Armträgheitsmoment
I_R	=	10 ⁻³ kg m ²	-	Rotorträgheitsmoment
\ddot{u}	=	200	-	Getriebeübersetzung
g	-			Relativdrehzahl des Armes
H_R	-			Rotordrehimpuls
H_A	-			Armdrehimpuls

$$\begin{aligned} H_A &= I_A g \\ H_R &= I_R \ddot{u} g \end{aligned}$$

$$\frac{H_R}{H_A} = \frac{I_R \ddot{u}}{I_A} = \frac{10^{-3} \text{ kg m}^2 \cdot 200}{10 \text{ kg m}^2} = 2 \cdot 10^{-2}$$

Aufgrund dieser Verhältnisse kann man vermuten, daß zumindest ein Teil der unter 1. genannten Kopplungen vernachlässigbar ist.

Dem wollen wir weiter nachgehen.

Roboter besitzen in der Regel sehr steife und fast spielfreie Getriebe.

Dies bedeutet, es gilt in guter Näherung:

$$R_{g^i} = \ddot{u}^i A_{g^i} \quad (7.1)$$

Die Drehzahlen des antreibenden Rotors und des angetriebenen Armes sind praktisch starr gekoppelt.

Unter dieser Voraussetzung reduziert sich (3.16) von einem System $2N$ -ter Ordnung auf ein System N -ter Ordnung.

Wir führen folgende Matrizen ein:

$$\ddot{u} = \begin{pmatrix} \ddot{u}^1 \\ \vdots \\ \ddot{u}^N \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

$$L = \begin{pmatrix} L^1 \\ \vdots \\ L^N \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

$$M = \begin{pmatrix} M^1 \\ \vdots \\ M^N \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q^1 \\ \vdots \\ Q^N \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Für (3.16) können wir jetzt schreiben:

$${}^{AA}J \ddot{g} + {}^{AR}J E \ddot{u} \dot{g} - {}^A\chi^k - {}^A\chi^G - Q = E \ddot{u} M \quad (7.6)$$

$${}^{RA}J \ddot{g} + {}^{RR}J E \ddot{u} \dot{g} - {}^R\chi^k - L = -M \quad (7.7)$$

E ist die NxN Einheitsmatrix.

Wir multiplizieren (7.7) mit EÜ von links und addieren zu (7.6)

$$\begin{aligned} & [{}^{AA}J + {}^{AR}J E \ddot{u} + E \ddot{u} {}^{RA}J + E \ddot{u} {}^{RR}J E \ddot{u}] \ddot{g} = \\ & \tilde{\chi}^k + \hat{\chi}^k + {}^A\chi^G + E \ddot{u} {}^R\chi + Q + E \ddot{u} L \end{aligned} \quad (7.8)$$

Mit dieser Gleichung und den Zahlenwerten für den jeweiligen Roboter kann man die relativen Größenordnungen der Matrizen abschätzen und zu Aussagen über mögliche Vernachlässigungen kommen.

Wegen der Abschätzungen im gegebenen Zahlenbeispiel sieht man, daß die Elemente der Matrizen ${}^{AR}J$, $E \ddot{u}$, $E \ddot{u} {}^{RA}J$ sehr viel kleiner sind als die entsprechenden Elemente der Matrizen ${}^{AA}J$ und $E \ddot{u} {}^{RR}J$. Entsprechend ist auch der Beitrag der Rotoren in den Kreiselkräften, dieser schlägt sich in $\hat{\chi}^k$ und $E \ddot{u} {}^R\chi$ nieder, gegenüber dem Beitrag der Gesamtarme und der inneren eingepprägten Momente $E \ddot{u} L$ gering. Man kann diese vier Terme daher mit sehr guter Näherung vernachlässigen. Dies bedeutet aber, daß es im Modell keine Kopplung über die Trägheitseffekte der Rotoren gibt.

Die beiden Teil-MKS (Gesamtarme und Rotoren) sind nur durch die von den Getrieben übertragenen Momente gekoppelt.

Diese Tatsache ist eine wesentliche Erleichterung für das Verständnis der Dynamik eines Roboters und den späteren Reglerentwurf.

8. Anmerkungen zu den Modellannahmen

Die Bewegungsgleichungen wurden unter der Annahme abgeleitet, daß der antreibende Rotor eines Armes im davorliegenden Arm eingebettet ist, vgl. Abschnitt 3.2.

Diese Annahme trifft z.B. für den Roboter Mantec r3 zu.

Für den Roboter GDA HDS 06 trifft sie jedoch nicht zu, dort sind neben dem Antrieb für Arm 4 auch die Antriebe der Arme 5 und 6 in Arm 3 eingebettet [5].

Man muß daher die Annahme des Abschnitts 3.2 fallenlassen.

Welche Konsequenzen hat das für die Bewegungsgleichungen?

- Die kinematischen Gleichungen (3.12) und (3.13) ändern sich nicht, wie unmittelbar einleuchtet.
- Die Struktur der dynamischen Gleichungen (3.16) ändert sich ebenfalls nicht.
- Das Gesamtarmkonzept ist weiterhin gültig.
- Änderungen gibt es nur in den Matrizen J^{AR} , J^{RA} , R_X und \hat{x}^K .

Gerade diese Matrizen können im Modell aber vernachlässigt werden, vgl. Kapitel 7.

Das bedeutet, die in Abschnitt 3.2 getroffene Annahme ist für unser Modell nicht weiter relevant und kann daher fallengelassen werden.

9. Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, für einen Roboter mit rotatorischen Freiheitsgraden die Grundlagen für ein dynamisches Modell zu erarbeiten, das alle wesentlichen dynamischen Effekte eines Roboters erfaßt.

Der Roboter wurde gedanklich in die Teilsysteme zerlegt.

1. Roboterarme
2. Antriebsstränge
3. Motoren

Das Teilsystem Motor zerfällt dabei wieder in zwei Untersysteme:

3.1. Elektromagnetisches Untersystem, beschreibt den Zusammenhang zwischen der Steuerspannung für den Motor (oder Stromsollwert des Stromreglers) und dem im Luftspalt erzeugten Drehmoment.

3.2. Massenträgheitseigenschaften des Rotors.

Die Teilsysteme 1., 2. und das Untersystem 3.2 lassen sich durch ein MKS beschreiben.

Die Bewegungsgleichungen dieses MKS wurden abgeleitet.

Die Kopplung zwischen dem MKS und Untersystem 3.1. geschieht über das Drehmoment im Luftspalt.

Die Differentialgleichungen für das Untersystem 3.1. müssen separat angegeben werden.

Das MKS läßt sich wieder in zwei Teil-MKS unterteilen, in eines, das die Trägheitseigenschaften der Arme, und in ein zweites, das die Trägheitseigenschaften der Rotoren beschreibt. Diese beiden Teil-MKS sind auf zwei Arten gekoppelt:

- über Trägheitseffekte (Zentrifugal- und Corioliskräfte)
- über eingeprägte Kräfte

Es zeigt sich, daß bei heute üblicher Bauweise von Robotern die erste Kopplungsart mit sehr guter Näherung gegenüber der zweiten vernachlässigt werden kann, was sowohl für das Verständnis der Roboterdynamik als auch für den Reglerentwurf eine große Erleichterung bedeutet.

Literatur:

- [1] Kane, T.R.:
Dynamics, Stanford California 1978
3. Edition.
- [2] Schwertassek, R. und R.E. Roberson:
A State Space Dynamical Representation for Multibody Mechanical Systems, Part I, Acta Mechanica, Bd. 50, 1983, S. 141-161
- [3] Vukobratović, M. und V. Potkonjak:
Dynamics of Manipulation Robots, Springer 1982.
- [4] Wittenburg, J.:
Dynamics of Systems of Rigid Bodies, B.G. Teubner, Stuttgart 1977.
- [5] Konstruktionszeichnungen und Hinweise zum Aufbau des Roboters GDA
HDS 06.